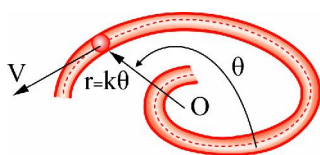


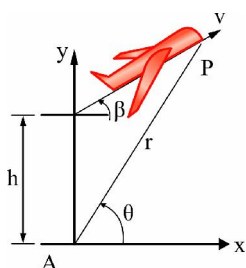
دینامیک و ارتعاشات

۱. یک شیار ثابت حلزونی $r = k\theta$ ، در صفحه افقی قرار گرفته است. ذره‌ای به جرم m آزادانه با سرعت ثابت v در این شیار با اصطکاک اندک حرکت می‌کند. نیروی عکس‌العمل قائم شیار در صفحه افقی که بر ذره وارد می‌شود کدام است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad & mv^2 \frac{(r^2 + 2k^2)}{\sqrt{(k^2 + r^2)^3}} \quad (2) \quad \frac{3}{2} mv^2 \frac{(r^2 + k^2)}{\sqrt{(k^2 + r^2)^3}} \\ (3) \quad & \frac{1}{2} mv^2 \frac{(r^2 + k^2)}{\sqrt{(k^2 + r^2)^3}} \quad (4) \quad mv^2 \frac{(2r^2 + k^2)}{\sqrt{(k^2 + r^2)^3}} \end{aligned}$$

۲. هواپیمایی با سرعت ثابت v به نحوی حرکت می‌کند که با افق زاویه β می‌سازد. ایستگاه رادار A ، آن را تعقیب می‌کند. سرعت شعاعی \dot{r} بر حسب پارامترهای داده شده کدام است؟



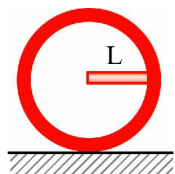
$$(1) \quad \dot{r} = v \sin(\theta - \beta)$$

$$(2) \quad \dot{r} = v \cos^2 \beta$$

$$(3) \quad \dot{r} = v \sin(\theta + \beta)$$

$$(4) \quad \dot{r} = v \cos(\theta - \beta)$$

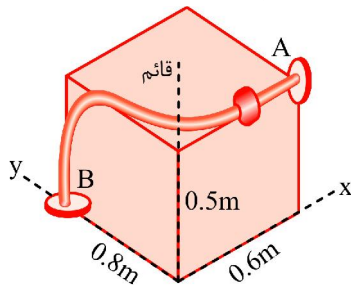
۳. میله‌ای با توزیع جرم یکنواخت به طول L و جرم m در داخل حلقه بدون جرمی به شعاع L جوش داده شده است. اگر این سیستم در لحظه نشان داده شده از حال سکون رها گردد، اندازه شتاب زاویه‌ای و عکس‌العمل قائم بر سطح آن در همین لحظه کدامند؟ (حلقه دارای تماس بدون لغزش با زمین می‌باشد).



$$(1) \quad N = \frac{2g}{5L}, \alpha = 0 \quad (2) \quad N = \frac{13}{16} mg, \alpha = \frac{3g}{8L}$$

$$(3) \quad N = \frac{7}{8} mg, \alpha = \frac{2}{3} \frac{g}{L} \quad (4) \quad N = \frac{13}{8} mg, \alpha = \frac{g}{3L}$$

۴. لغزنده 2 کیلوگرمی در طول یک میله ثابت صیقلی تحت اثر نیروی وزن خود و نیروی خارجی ثابت $F = -15\vec{i} + 10\vec{j} + 15\vec{k}$ حرکت می‌کند. اگر لغزنده از نقطه A از حالت سکون شروع به حرکت کند، اندازه سرعت آن وقتی که به نقطه B می‌رسد، چند متر بر ثانیه خواهد بود؟ $(\vec{g} = -9.8\vec{k} \frac{m}{s^2})$



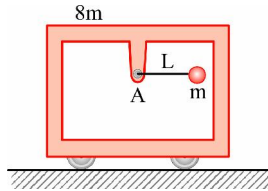
(۱) 0.35

(۲) 2.25

(۳) 1.78

(۴) 4.39

۵. قابی به جرم 6m در حال ایست می‌باشد. اگر آونگ به جرم m از ایست در حالت افقی رها شود. سرعت نسبی جرم آونگ نسبت به قاب هنگامی که آونگ عمودی می‌شود، کدام است؟



(۱) $9\sqrt{\frac{gL}{21}}$

(۲) $9\sqrt{\frac{gL}{23}}$

(۳) $7\sqrt{\frac{gL}{21}}$

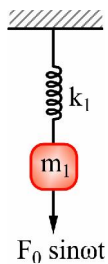
(۴) $7\sqrt{\frac{gL}{23}}$

۶. سیستم جرم (m_1) و فنر (k_1) شکل زیر تحت نیروی هارمونیک $F_0 \sin \omega t$ قرار دارد. می‌خواهیم با اضافه کردن جرم و فنر دیگری (k_2, m_2) به این سیستم دامنه ارتعاش جرم m_1 را صفر نماییم. در صورتی که چهار حالت زیر از نظر اجرایی امکان‌پذیر باشد، مناسب‌ترین و بهترین پاسخ کدام است؟

$$k_1 = 25000 \frac{N}{m}$$

$$m_1 = 250 \text{ kg}$$

$$\omega = 10 \frac{\text{rad}}{s}$$



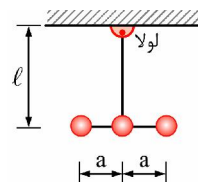
(۱) $m_2 = 50 \text{ kg}, k_2 = 10000 \frac{N}{m}$

(۲) $m_2 = 150 \text{ kg}, k_2 = 30000 \frac{N}{m}$

(۳) $m_2 = 150 \text{ kg}, k_2 = 15000 \frac{N}{m}$

(۴) $m_2 = 50 \text{ kg}, k_2 = 5000 \frac{N}{m}$

۷. در آونگ زیر، دو میله صلب و بدون جرم به هم جوش داده شده‌اند. مطابق شکل، سه جرم m به فواصل مساوی به یکی از میله‌ها متصل شده است. فرکانس طبیعی سیستم کدام است؟



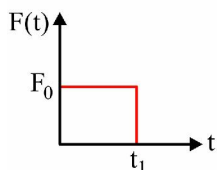
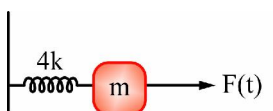
(۱) $\sqrt{\frac{3gl}{3l^2 + 2a^2}}$

(۲) $\sqrt{\frac{gl}{l^2 + a^2}}$

(۳) $\sqrt{\frac{g}{l}}$

(۴) $\sqrt{\frac{2gl}{3l^2 + 2a^2}}$

۸. در سیستم زیر، نیرویی مطابق شکل وارد می‌شود. با فرض شرایط اولیه صفر، پاسخ سیستم برای $t > t_1$ ، کدام است؟



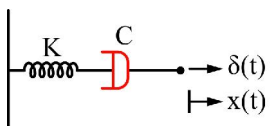
$$\frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_1) + \cos \omega_n t] \quad (۱)$$

$$\frac{F_0}{4k} \cos \omega_n (t - t_1) \quad (۲)$$

$$\frac{F_0}{4k} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos \omega_n t] \quad (۳)$$

$$\frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_1) + \cos \omega_n t] \quad (۴)$$

۹. سیستم زیر از یک فنر و دمپر که به طور سری به هم متصل شده‌اند تشکیل شده است. چنانچه نیروی $F(t) = \delta(t)$ سیستم را تحریک کند، پاسخ سیستم کدام است؟



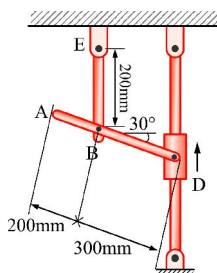
$$\frac{1}{c} \delta(t) + \frac{1}{k} u(t) \quad (۲) \quad \frac{1}{k} \delta(t) + \frac{1}{c} u(t) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{c} \delta(t) - \frac{1}{k} u(t) \quad (۴) \quad \frac{1}{k} \delta(t) - \frac{1}{c} u(t) \quad (۳)$$

۱۰. اگر دامنه یک نوسان میرا در دوره تناوب اول و دوم 1.5 و 2.5 سانتی‌متر باشد، در دوره تناوب سوم، دامنه نوسان آن کدام است؟

$$\ln(1.5) \quad (۴) \quad e^{2.5} \quad (۳) \quad \ln(2.5) \quad (۲) \quad 0.4 \quad (۱)$$

۱۱. در شکل روبه‌رو، میله AD در نقاط D, B لولا شده است. در لحظه نشان داده شده، لغزنده D دارای سرعت $1.2 \frac{m}{s}$ به سمت بالا می‌باشد. سرعت نقطه A در این لحظه چند متر بر ثانیه است.



$$0.8 \quad (۱)$$

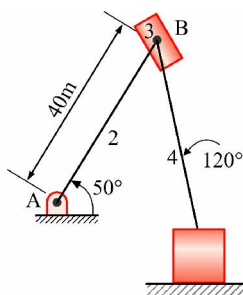
$$14 \quad (۲)$$

$$1.2 \quad (۳)$$

$$18 \quad (۴)$$

۱۲. در مکانیزم زیر، لینک 4 با سرعت $8 \frac{m}{s}$ و شتاب $80 \frac{m}{s^2}$ به سمت چپ حرکت می‌کند. پس از تکمیل دیاگرام

سرعت، برای رسم دیاگرام شتاب از کدام فرمول می‌توان استفاده کرد؟



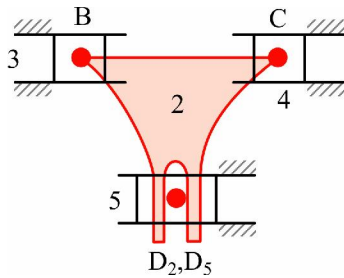
$$a_{B_2} = a_{B_4} + a_{B_2, B_4}^c + a_{B_2, B_4}^n \quad (۱)$$

$$a_{B_4} = a_{B_2}^n + a_{B_2}^t + a_{B_2, B_4}^c \quad (۲)$$

$$a_{B_2}^n + a_{B_2}^t = a_{B_4} + a_{B_2, B_4}^t \quad (۳)$$

$$a_{B_4} = a_{B_2}^n + a_{B_2}^t + a_{B_2, B_4}^t + a_{B_2, B_4}^n + a_{B_2, B_4}^c \quad (۴)$$

۱۳. در اهرم‌بندی پنج میله‌ای با اتصال چنگالی، در مفصل D کدام عبارت مصداق دارد؟



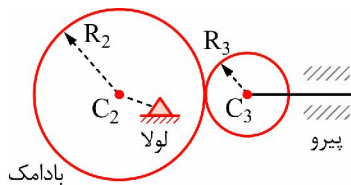
$$V_{D_5} \neq V_{D_2} = V_C \quad (1)$$

$$V_{D_5} \neq V_{D_2} + V_{D_5 D_2} \quad (2)$$

$$V_{D_5} \neq V_{D_2} \neq V_C \quad (3)$$

$$V_{D_5} = V_{D_2} = V_B = V_C \quad (4)$$

۱۴. شعاع دایره مبنا در بادامک روبه رو کدام است؟ (لولا در فاصله e از مرکز بادامک (C₂) قرار دارد).



$$2e \quad (1)$$

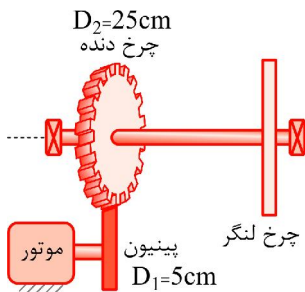
$$R_3 + R_2 - e \quad (2)$$

$$R_3 + R_2 + e \quad (3)$$

$$R_2 + R_3 \quad (4)$$

۱۵. مطابق شکل زیر، الکتروموتوری از طریق یک پینیون و چرخ دنده، محوری حامل چرخ لنگر را به حرکت درمی‌آورد. اگر ممان اینرسی قطعات برحسب kgm^2 به صورت زیر باشند:

چرخ لنگر 4 محور چرخ لنگر 0.02، چرخ دنده 0.98، موتور 0.15 و پینیون 0.05 همچنین گشتاور موتور در شروع حرکت برابر 10 نیوتن متر باشد، شتاب زاویه‌ای محور چرخ لنگر بالا فاصله پس از روشن شدن موتور چند رادیان بر مجذور ثانیه می‌باشد؟



$$5 \quad (1)$$

$$25 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$10 \quad (4)$$

۱۶. دو سیستم خطی را در نظر بگیرید. سیستم اولی ثابت زمانی‌اش بسیار کوچک سیستم دومی ثابت زمانی‌اش در مقایسه با اولی بسیار بزرگ است. برای شناسایی (System Identification) این سیستم‌ها، دو روش عکس‌العمل سیستم‌ها را در نظر می‌گیریم.

روش اول: عکس‌العمل حالت گذرا به ورودی پله‌ای واحد

روش دوم: عکس‌العمل حالت ماندگار به ورودی فرکانسی

هر کدام از این سیستم‌ها باید با کدام روش شناسایی شود؟

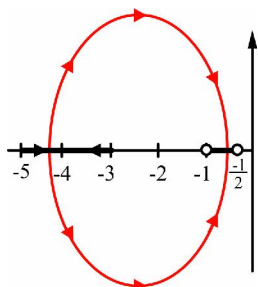
(۱) سیستم اولی با روش اول و سیستم دومی با روش دوم

(۲) هر دو سیستم با هر دو روش قابل انجام است.

(۳) سیستم اولی با روش دوم و سیستم دومی با روش اول

(۴) هر دو سیستم با روش دوم

۱۷. تحت تاثیر ورودی پله‌ای واحد و ورودی سرعت واحد، قدرمطلق خطای پایای سیستمی که مکان هندسی ریشه‌های آن در شکل ترسیم شده به ترتیب کدامند؟



$$e_{ss} = 0, |e_{ss}| = \frac{K}{15} \quad (۱)$$

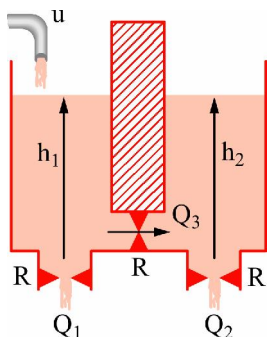
$$|c_{ss}| = \frac{30}{K}, c_{ss} = 0 \quad (۲)$$

$$e_{ss} = 0, |e_{ss}| = \frac{K}{30} \quad (۳)$$

$$|c_{ss}| = \frac{15}{K}, e_{ss} = 0 \quad (۴)$$

۱۸. سیستم شکل زیر شامل دو مخزن است. اگر سطح مقطع مخازن مساوی هم و برابر $A = 1$ و مقاومت شیرها همه مساوی $R = 1$ باشد، با فرض آن که $h_2(t), h_1(t)$ ارتفاع سیال در دو ظرف، u دبی ورودی به ظرف اول و Q_1, Q_2 به ترتیب دبی خروجی از ظرف اول و دوم و Q_3 دبی عبوری بین دو ظرف باشد، با فرض خطی بودن

سیستم یعنی $Q_1 = \frac{h_1}{R}$, $Q_2 = \frac{h_2}{R}$, $Q_3 = \frac{h_1 - h_2}{R}$ ، تابع تبدیل بین ورودی u و خروجی Q_3 کدام است؟



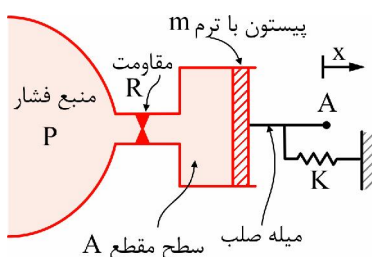
$$\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{(s+1)^2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{s+3} \quad (۴)$$

۱۹. سیستم شکل زیر، یک دستگاه اندازه‌گیری فشار را نشان می‌دهد. این دستگاه فشار P (کمیت مورد اندازه‌گیری) را به تغییر مکان x (کمیت مورد اندازه‌گیری) تبدیل می‌کند. برای سیستم با پارامترهای نشان داده شده، تابع تبدیل بین ورودی $P(s)$ و خروجی $X(s)$ کدام است؟



$$\frac{\frac{A}{R}}{s^2 + ms + K} \quad (۱)$$

$$\frac{A}{ms^2 + RA^2s + K} \quad (۲)$$

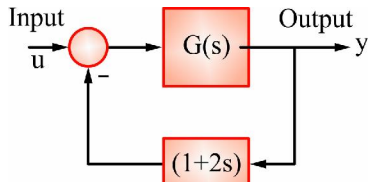
$$\frac{\frac{A}{K}}{ms + R + 1} \quad (۳)$$

$$\frac{\frac{A}{m}}{s^2 + Rs + k} \quad (۴)$$

۲۰. یک سیستم کنترلی توسط بلوک دیاگرام زیر، نمایش داده شده است. بیشتر $G(s)$ مرتبه دو است. زمان نشست

۲٪ آن تحت تاثیر ورودی پله، یک ثانیه است. زمان ماکزیمم (Peak time) آن تحت تاثیر ورودی پله، $\frac{\pi}{3}$ ثانیه

است. خطای ماندگار تحت تاثیر ورودی پله، صفر است. تابع تبدیل $G(s)$ کدام است؟



$$\frac{25}{(s+1)(s+25)} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{(s+1)(s+5)} \quad (۱)$$

$$\frac{25}{s(s-42)} \quad (۴)$$

$$\frac{25}{(s-1)(s+25)} \quad (۳)$$

پاسخ تشریحی

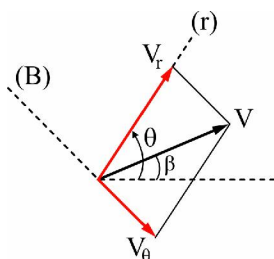
۱. گزینه ۱ درست است.

$$\rho = \frac{1}{k} \quad , \quad k = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^2}$$

$$k = \frac{k^2 \theta^2 + 2k^2 - 0}{(k^2 \theta^2 + k^2)^2} = \frac{r^2 + 2k^2}{(r^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2k^2}{(r^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum F_n = \frac{mV^2}{\rho} = mV^2 \left(\frac{r^2 + 2k^2}{(r^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

۲. گزینه ۴ درست است.

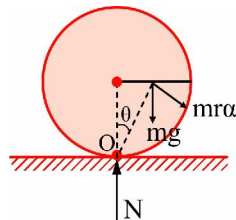
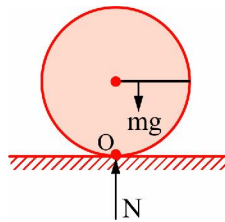


$$\vec{V} = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{V} = |V| \cos(\theta - \beta) \hat{e}_r + |V| \sin(\theta - \beta) \hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r} = V \cos(\theta - \beta)}$$

۳. گزینه ۲ درست است.



$$\sum M_0 = I\ddot{\theta} \Rightarrow Mg \frac{L}{2} = I_0 \ddot{\theta}$$

$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2 + m \left(L^2 + \frac{L^2}{4} \right) = \frac{16}{12} ML^2 = \frac{4}{3} ML^2$$

$$\Rightarrow mg \frac{L}{2} = \frac{4}{3} mL^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\frac{gL}{2}}{\frac{4}{3} L^2} = \frac{3g}{8L}$$

$$\sum F_y = -mr\alpha \cos(90 - \theta) = mr\alpha \sin \theta$$

$$N - mg = -m \left(\sqrt{L^2 + \frac{L^2}{4}} \right) \times \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{L^2 + \frac{L^2}{4}}} \times \frac{3g}{8L}$$

$$N = mg - \frac{mg}{16} = \frac{15}{16} mg$$

۴. گزینه ۴ درست است.

$$E_A + W_{A-B} = E_B \quad ①$$

$$E_A = mgh_A = 2 \times 9.8 \times 0.5 = 9.8 \quad ②$$

$$\begin{cases} W_{A-B} = \vec{F} \cdot (\overline{AB}) \\ \overline{AB} = B - A = (0, 0.8, 0) - (0.6, 0, 0.5) = (-0.6, 0.8, -0.5) \end{cases}$$

$$W_{A-B} = (-15, 10, 15) \cdot (-0.6, 0.8, -0.5) = 15 \times 0.6 + 10 \times 0.8 - 15 \times 0.5 \quad \boxed{W_{A-B} = 9.5} \quad ③$$

$$E_B = \frac{1}{2} MV_B^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times V_B^2 = V_B^2$$

$$①, ②, ③, ④ \Rightarrow 9.8 + 9.5 = V_B^2 \Rightarrow V_B = \sqrt{19.3} = 4.39$$

۵. گزینه ۳ درست است.

تکانه خطی در سیستم نشان داده شده ثابت است:

$$D_1 = D_2 \Rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow m v_1 + 6m v_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = -6v_2}$$

قانون پایستگی انرژی:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgL = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow mgL = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 6m v_2^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 + 6v_2^2 = 2gL \Rightarrow 36v_2^2 + 6v_2^2 = 2gL \Rightarrow 42v_2^2 = 2gL \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{gL}{21}}$$

$$v_1 = -6v_2 = -6\sqrt{\frac{gL}{21}}$$

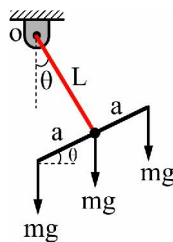
$$v_{\frac{2}{1}} = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{gL}{21}} + 6\sqrt{\frac{gL}{21}} = 7\sqrt{\frac{gL}{21}}$$

۶. گزینه ۴ درست است.

فرکانس طبیعی سیستم جرم و فنر اضافه شده باید با فرکانس تحریک سیستم برابر باشد. چون فرکانس تحریک $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است،

بنابراین باید $\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 10$ باشد بنابراین یا گزینه ۳ یا ۴ صحیح است. برای کاهش ارتعاشات با روش افزودن جرم باید جرم اضافه شده تا حد ممکن از جرم سیستم اصلی کمتر باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۷. گزینه ۱ درست است.



$$\begin{aligned} \sum M_O &= I\ddot{\theta} \\ -mg(L \sin \theta) - mg(L \sin \theta + a \cos \theta) - mg(L \sin \theta - a \cos \theta) \\ &= (mL^2 + m(L^2 + a^2) + m(L^2 + a^2))\ddot{\theta} \\ \Rightarrow m(3L^2 + 2a^2)\ddot{\theta} + 3mgL \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\theta \ll 6^\circ \Rightarrow \sin \theta \approx \theta \Rightarrow m(3L^2 + 2a^2)\ddot{\theta} + 3mgL \theta = 0$$

$$\left. \begin{aligned} m^* &= m(3L^2 + 2a^2) \\ k^* &= 3mgL \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k^*}{m^*} = \frac{3mgL}{m(3L^2 + 2a^2)} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3gL}{3L^2 + 2a^2}}$$

۸. گزینه ۳ درست است.

$$F(t) = F_0(u(t) - u(t - t_1))$$

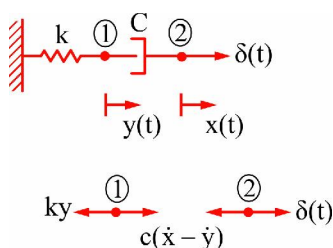
$$m\ddot{x} + kx = u(t - t_0) \xrightarrow{\text{پاسخ}} x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2}(1 - \cos \omega_n(t - t_0))$$

$$m\ddot{x} + 4kx = F_0(u(t) - u(t - t_1)) \rightarrow \omega_n^2 = \frac{4k}{m}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{m \times \frac{4k}{m}} \times F_0(1 - \cos \omega_n t - (1 - \cos \omega_n(t - t_1)))$$

$$= \frac{F_0}{4k}(\cos(\omega_n(t - t_1)) - \cos \omega_n t)$$

۹. گزینه ۱ درست است.



$$\begin{cases} \sum F_1 = m_1 \ddot{y} \\ \sum F_2 = m_2 \ddot{x} \\ c(\dot{x} - \dot{y}) - ky = 0 \\ \delta(t) - ((\dot{x} - \dot{y})) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} cs(x-y) - ky = 0 & ① \\ 1 - cs(x-y) = 0 & ② \end{cases}$$

$$① \rightarrow y = \frac{cs}{cs+k} x$$

$$② \rightarrow cs \left(x - \frac{cs}{cs+k} x \right) = 1 \Rightarrow cs \times \left(\frac{k}{cs+k} \right) = 1$$

$$\Rightarrow x(s) = \frac{cs+k}{csk} = \frac{1}{k} + \frac{1}{cs} \Rightarrow x(t) = L^{-1}[x(s)] = \frac{1}{k} \delta(t) + \frac{1}{c} u(t)$$

۱۰. گزینه ۱ درست است.

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \ln \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow \frac{2.5}{1} = \frac{1}{A_3}$$

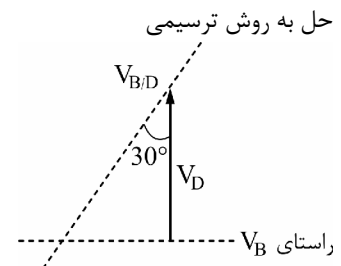
$$\Rightarrow A_3 = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

۱۱. گزینه ۲ درست است.

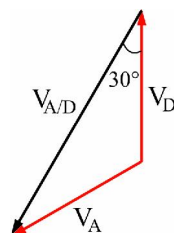
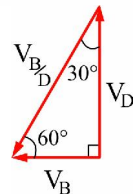
حل به روش ترسیمی

$$\frac{x\checkmark}{V_B} = \frac{\checkmark\checkmark}{V_D} + \frac{x\checkmark}{V_{B/D}}$$

$$\text{قانون سینوسها: } \frac{1.2}{\sin 60} = \frac{V_B}{\sin 30} = \frac{V_D}{\sin 90}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} V_B = 1.2 \frac{\sin 30}{\sin 60} = 1.2 \times \frac{\sin 30}{\sin 60} = 1.2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1.2}{\sqrt{3}} \\ V_{B/D} = 1.2 \frac{\sin 90}{\sin 60} = \frac{1.2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2.4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left| V_{B/D} \right| = |BD| \theta_{AD} \Rightarrow \theta_{AD} = \frac{2.4}{0.3 \sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



$$\vec{V}_A = \vec{V}_D + \vec{V}_{A/D} = 1.2 \hat{j} + |AD| \theta_{AD} (-\sin 30 \hat{i} - \cos 30 \hat{j})$$

$$= 1.2 \hat{j} + 0.5 \times \frac{8}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} \right) = \frac{-2}{\sqrt{3}} \hat{i} - 0.8 \hat{j}$$

$$|V_A| = \sqrt{\frac{4}{3} + 0.64} \approx \underline{1.4}$$

۱۲. گزینه ۲ درست است.

در حالت کلی داریم:

$$a_{B_4} = a_{B_2}^n + a_{B_2}^t + a_{B_4/B_2}^n + a_{B_4/B_2}^t + a_{B_4/B_2}^c$$

چون: $r_{B_4/B_2} = 0$ بنابراین $a_{B_4/B_2}^n = r_{B_4/B_2} \ddot{\theta} = 0$, $a_{B_4/B_2}^t = r_{B_4/B_2} \dot{\theta}^2 = 0$ بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۳. گزینه ۴ درست است.

نقطه B و C تنها در راستای x حرکت دارند بنابراین $V_B = 0$ یعنی لینک 2 دوران ندارد بنابراین $V_D = 0$ یعنی نقطه

D نیز در صفحه افقی حرکت می کند. بنابراین $V_B = V_C = V_{D_2} = V_D$

۱۴. گزینه ۲ درست است.

دایره مبنا کوچکترین دایره ای است که بر سطح لبه بادامک مماس و یا بر قسمتی از منحنی آن منطبق باشد و اندازه آن تعیین کننده اندازه بادامک است.

با توجه به شکل به وضوح شعاع کوچک ترین دایره مماس برابر است با:

$$R_2 + R_3 - e$$

۱۵. گزینه ۱ درست است.

روتور $R \rightarrow$ و پینیون $P \rightarrow$

$$T - F \times 0.05 = I_P \ddot{\theta}_P \Rightarrow 10 - 0.05F = (0.05 + 0.15) \ddot{\theta}_P \Rightarrow 0.05F = 10 - 0.2 \ddot{\theta}_P \quad ①$$

$$F \times 0.25 = I_R \ddot{\theta}_R \Rightarrow 0.25F = (4 + 0.02 + 0.98) \ddot{\theta}_R \Rightarrow 0.25F = 5 \ddot{\theta}_R \quad ②$$

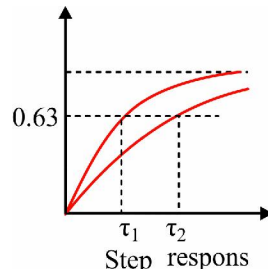
$$\frac{\ddot{\theta}_R}{\ddot{\theta}_P} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \Rightarrow \ddot{\theta}_P = 5 \ddot{\theta}_R \quad ③$$

$$①, ② \Rightarrow 5(10 - 0.2 \ddot{\theta}_P) \Rightarrow 10 - 0.2 \ddot{\theta}_P = \ddot{\theta}_R$$

$$③ \rightarrow 10 - 0.2 \times 5 \ddot{\theta}_R = \ddot{\theta}_R \Rightarrow 10 = 2 \ddot{\theta}_R \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_R = 5}$$

۱۶. گزینه ۲ درست است.

$$\tau_1 \ll \tau_2$$

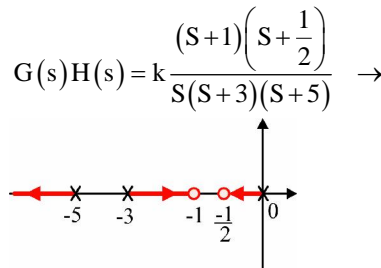


با توجه به آنکه در پاسخ به ورودی پله پس از گذشت یک ثابت زمانی به 0.63% پاسخ نهایی می رسد بنابراین سیستم با ثابت زمانی کمتر زودتر به این مقدار می رسد.

با توجه به آنکه زمان نشست برای خطای 5%، 3τ می باشد با توجه به زمان رسیدن به حالت ماندگار سیستم را می توان با مقایسه پاسخ های زمانی در سیستم تشخیص داد.

۱۷. سوال غلط است.

با توجه به قطب‌ها و صفرهای سیستم در مکان هندسی ریشه‌ها داریم:
مکان هندسی ریشه‌های این سیستم به شکل زیر خواهد بود.



اگر منظور تابع تبدیل ① باشد:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{SR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

\swarrow ورودی پله $R(s) = \frac{1}{s}$
 \searrow ورودی سرعت $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S \times \frac{1}{s}}{1 + \frac{k(S+1)(S+0.5)}{S(S+3)(S+5)}} = 0$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S \times \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{k(S+1)(S+0.5)}{S(S+3)(S+5)}} = \frac{1}{\frac{K(0.5)}{15}} = \frac{30}{k}$$

نمودار رسم شده در صورت سوال شبیه به سیستم ② است.

$$G(s)H(s) = k \frac{(S+1)\left(S+\frac{1}{2}\right)}{(S+3)(S+5)} \quad ②$$

که در آن قطب $S=0$ در نظر گرفته نشده است.

۱۸. گزینه ۴ درست است.

$$① \quad U - Q_1 - Q_3 = SH_1 \Rightarrow U = (S+1)Q_1 + Q_3$$

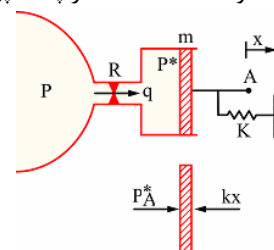
$$② \quad Q_3 - Q_2 = SH_2 \Rightarrow Q_3 = (S+1)Q_2 = (S+1)(Q_1 - Q_3) \Rightarrow Q_1 = \frac{S+2}{S+1}Q_3$$

$$H_1 = Q_1, \quad H_2 = Q_2, \quad H_1 - H_2 = Q_3 \Rightarrow Q_1 - Q_2 = Q_3 \Rightarrow Q_2 = Q_1 - Q_3$$

$$\Rightarrow U = (S+2)Q_3 + Q_3 = (S+3)Q_3 \Rightarrow \frac{Q_3}{u} = \frac{1}{S+3}$$

۱۹. گزینه ۲ درست است.

q: دبی عبوری از مقاومت R, P*: فشار پشت پیستون



$$\begin{cases} P - P^* = Rq & ① \\ q = A\dot{x} & ② \\ P^*A - kx = m\ddot{x} & ③ \end{cases}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow P - P^* = RA\dot{x} \Rightarrow P - P^* = RASX \Rightarrow P^* = P - RASX$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow (P - RASx)A - kx = mS^2X \Rightarrow PA = (ms^2 + RA^2S + k)x$$

$$\Rightarrow \frac{X}{P} = \frac{A}{ms^2 + RA^2S + k}$$

۲۰. گزینه ۴ درست است.

$$e_{ss} = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S \times \frac{1}{S}}{1 + G(s)(1 + 2s)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G(s)(1 + 2s) = \infty \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \Rightarrow \text{گزینه ۴}$$

دینامیک و ارتعاشات

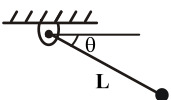
۱- مقدار شتاب ذره‌ای که با سرعت ثابت v در طول مسیر با رابطه $S = \frac{a \cos \theta}{b}$ در حال حرکت است، برابر با کدام گزینه است؟ (θ زاویه بین مماس بر مسیر و محور x است، a و b ثابت هستند).

$$\begin{array}{llll} \frac{av}{b \sin \theta} & (4) & \frac{-bv^2}{a \sin \theta} & (3) & \frac{a \cos \theta}{bv} & (2) & \frac{-a}{b} \cos \theta & (1) \end{array}$$

۲- کامیونی از حالت سکون با شتاب $a = c_1 - c_2 v^2$ شروع به حرکت می‌کند. اگر c_2 مقداری معلوم باشد، c_1 را چنان بیابید که مسیر مستقیمی به طول x_0 را در زمان t_0 طی کند. ($c_1, c_2 > 0$)

$$\begin{array}{llll} c_1 = \frac{x_0^2 t_0^2 c_2}{[\cot(e^{x_0 c_2})]^2} & (4) & c_1 = \frac{[\tanh^{-1}(x_0 c_2)]^2}{x_0 t_0 c_2} & (3) & c_1 = \frac{t_0^2 c_2^2}{[\sinh(x_0 c_2)]^2} & (2) & c_1 = \frac{[\cosh^{-1}(e^{x_0 c_2})]^2}{c_2 t_0^2} & (1) \end{array}$$

۳- شتاب زاویه‌ای آونگ زیر از رابطه $\ddot{\theta} = \frac{rg \cos \theta}{2L}$ به دست می‌آید که L طول آونگ می‌باشد. آونگ از حالت افقی در زمان $t_0 = 0$ رها می‌شود. زمان t_1 را که آونگ از زاویه $\theta = 30^\circ$ می‌گذرد کدام است؟ ($\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} = A$)



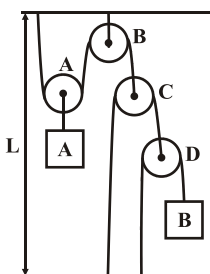
$$\begin{array}{ll} \frac{g}{L} \sqrt{\frac{2L}{A}} & (2) & AL \sqrt{\frac{rg}{L}} & (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{\frac{A^2 L}{rg}} & (4) & \sqrt{\frac{rg}{3LA^2}} & (3) \end{array}$$

۴ - تویی را به سرعت $20 \frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. شتاب حرکت توپ در اثر مقاومت هوا در راستای قائم به سمت بالا $a_1 = -g - 2kv^2$ و به سمت پایین برابر با $a_2 = g + 2kv^2$ می‌باشد. حداکثر ارتفاع آن در بالا H و سرعت برخورد آن با زمین v_f به ترتیب برابر است با:

(۱) $18/5, 14/23$ (۲) $20, 15/46$ (۳) $19/2, 16$ (۴) $21, 17/76$

۵ - معادله تغییر مکان وزنه A به صورت $y = \frac{2t^2}{3}$ می‌باشد. شتاب وزنه B برابر با کدام گزینه است؟



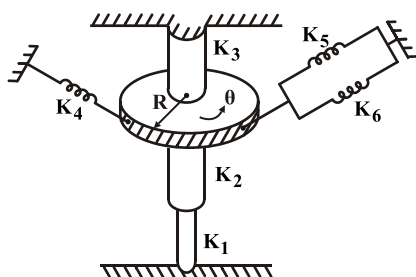
(۱) ۱۰

(۲) $\frac{32}{3}$

(۳) ۱۱

(۴) $\frac{34}{3}$

۶ - فنر معادل پیچشی برای سیستم زیر کدام گزینه می‌باشد؟



$$k_{eq} = k_4 + k_5 + k_6 + \frac{k_1 + k_2 + k_3}{R^2} \quad (1)$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \frac{(\frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + k_1)}{R^2} \quad (2)$$

$$k_{eq} = k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + (k_4 + k_5 + k_6) R^2 \quad (3)$$

$$k_{eq} = (\frac{k_5 k_6}{k_5 + k_6} + k_4) R^2 + k_1 + k_2 + k_3 \quad (4)$$

۷ - سیستم جرم و فنر با میرایی ویسکوز از حالت تعادل کشیده شده و رها می‌شود. حرکت سیستم به گونه‌ای است که دامنه حرکت در هر

نوسان ۱۰٪ کاهش می‌یابد. ζ چقدر است؟ ($\ln(\frac{10}{9}) = 0.1$)

(۴) 16×10^{-3}

(۳) 14×10^{-3}

(۲) 12×10^{-3}

(۱) 10×10^{-3}

۸ - میله یکنواختی توسط دو سیم عمودی به طول h که در فواصل a و b از مرکز جرم قرار دارند به صورت افقی آویزان است. اگر ضربه کوچکی به میله وارد شود آن گاه میله..... ($b > a$)

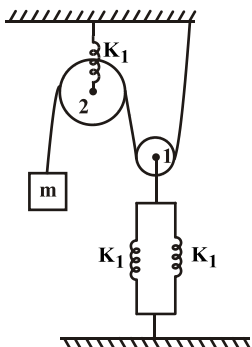
(۲) حول خط عمودی به فاصله $\frac{b}{4}$ از مرکز جرم نوسان می‌کند.

(۱) حول خط عمودی به فاصله $\frac{a}{4}$ از مرکز جرم نوسان می‌کند.

(۴) حول خط عمودی در وسط فاصله میان دو سیم نوسان می‌کند.

(۳) حول خط عمودی که از مرکز جرم می‌گذرد نوسان می‌کند.

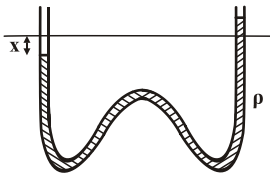
۹ - فرکانس طبیعی در سیستم زیر کدام گزینه می‌باشد؟



$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k_1}{12m}} \quad (2) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{12m}} \quad (1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k_1}{12m}} \quad (4) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{4k_1}{12m}} \quad (3)$$

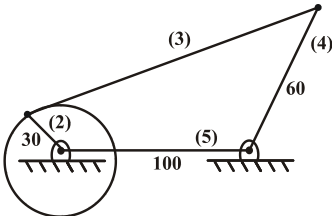
۱۰- دوره تناوب نوسان سیال در درون مانومتر زیر برابر است با: (L طول سیال در داخل مانومتر می باشد)



$$T_n = \sqrt{\frac{2\pi^2 L}{g}} \quad (2) \quad T_n = \sqrt{\frac{2\pi^2 L}{2g}} \quad (1)$$

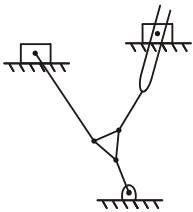
$$T_n = \sqrt{\frac{2\pi^2 g}{3L}} \quad (4) \quad T_n = \sqrt{\frac{2\pi^2 g}{L}} \quad (3)$$

۱۱- در مکانیزم شکل روبرو مقدار تفاضل حداکثر و حداقل طول میله ۳ کدام است؟ در حالتی که عضو ۲ بتواند دوران کند و عضو ۴ فقط نوسان کند. (مقادیر به mm می باشد)



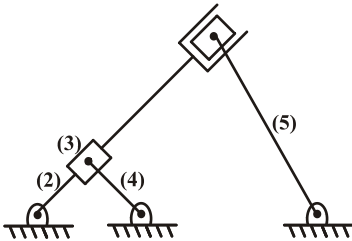
- (۱) ۶۰
- (۲) ۷۰
- (۳) ۱۳۰
- (۴) ۹۰

۱۲- تعداد درجات آزادی مکانیزم زیر برابر با کدام گزینه می باشد؟



- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

۱۳- تعداد درجات آزادی و تعداد مراکز آنی ماکزیمم در شکل زیر به ترتیب برابر با کدام گزینه است؟

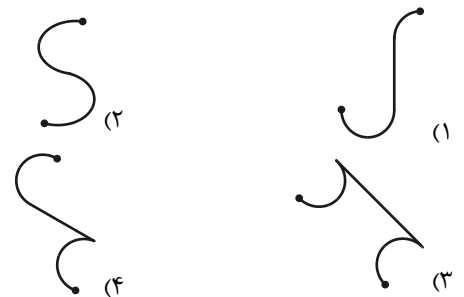
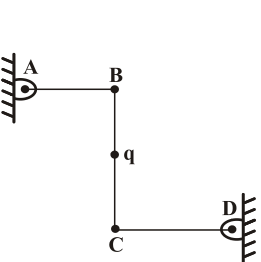


- (۱) ۱ و ۱۵
- (۲) ۲ و ۱۵
- (۳) ۲ و نمی توان تعیین کرد.
- (۴) ۱ و نمی توان تعیین کرد.

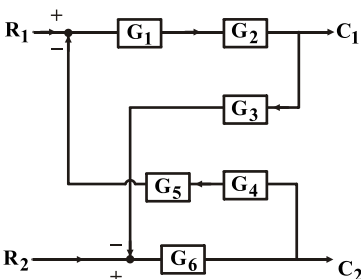
۱۴- در شکل سوال قبل، مرکز آنی زمین و عضو ۳ کدام است؟

- (۱) محل تلاقی عضو ۳ و ۴
- (۲) درامتداد عضو ۴ و در ∞
- (۳) درامتداد عضو ۲ و در ∞
- (۴) محل تلاقی عضو ۲ و زمین

۱۵- منحنی مسیر نقطه q به ازای موقعیت های متعدد مکانیزم سه میله ای مقابل، کدام است؟ (نقطه q در وسط میله BC قرار دارد)



۱۶- در دیاگرام بلوکی مقابل، تابع تبدیل $\frac{C_1}{R_2}$ برابر کدام گزینه است؟

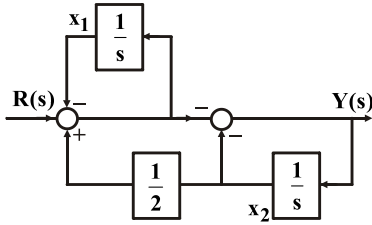


$$\frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6} \quad (2) \quad \frac{-G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6} \quad (1)$$

$$\frac{+G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6} \quad (4) \quad \frac{G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6} \quad (3)$$

۱۷- برای دیاگرام بلوکی زیر، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} r \quad (2) & \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (1) \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (4) & \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} r \quad (3) \end{aligned}$$

۱۸- با توجه به معادلات حالت روبرو تابع تبدیل سیستم $G(S) = \frac{y(s)}{u(s)}$ کدام گزینه است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$

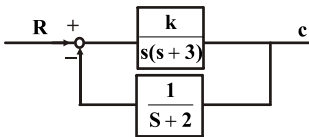
$$\frac{10}{s^2 + 4s + 3} \quad (4)$$

$$\frac{10(s+1)}{s^2 + 4s + 3} \quad (3)$$

$$\frac{10}{2s^2 + 3s + 4} \quad (2)$$

$$\frac{10(s+1)}{2s^2 + 3s + 4} \quad (1)$$

۱۹- با توجه به دیاگرام بلوکی مقابل حدود k برای پایداری چقدر است؟



$$k > 3 \quad (1)$$

$$k < 3 \quad (2)$$

$$30 < k < 40 \quad (3)$$

$$0 < k < 30 \quad (4)$$

$$s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 6 = 0$$

۲۰- معادله مشخصه سیستمی بصورت مقابل است. وضعیت پایداری در کدام گزینه صحیح می باشد؟

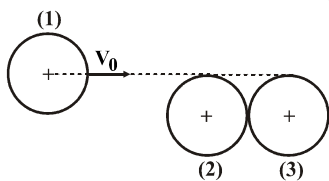
(۲) سیستم ۱ ریشه در سمت راست محور موهومی دارد.

(۱) سیستم پایدار است.

(۴) سیستم ۳ ریشه در سمت راست محور موهومی دارد.

(۳) سیستم ۲ ریشه در سمت راست محور موهومی دارد.

۲۱- گوی (۱) با سرعت V_0 مطابق شکل به گوی (۲) و (۳) که ساکن هستند برخورد می‌کند. اگر جرم و شعاع هر سه گوی یکسان باشند، سرعت گوی (۳) پس از برخورد چقدر است؟ (ضریب برخورد بین هر سه گوی e می‌باشد و از اصطکاک صرف‌نظر کنید)



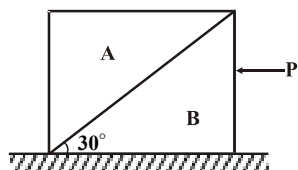
$$\frac{3(1+e)^2 V_0}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{e^2}{4} V_0 \quad (۴)$$

$$\frac{3(2+e)^2 V_0}{16} \quad (۱)$$

$$\frac{3(1+2e)^2 V_0}{16} \quad (۳)$$

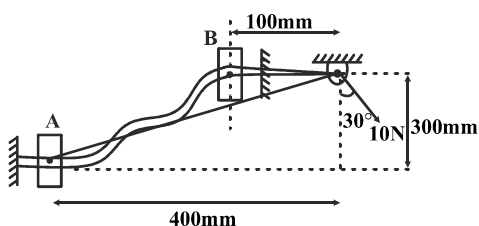
۲۲- بلوک‌های A و B هر کدام به جرم m مطابق شکل قرار دارند. ماکزیمم نیروی افقی P که می‌توان به B اعمال کرد چقدر باشد تا A نسبت به B حرکت نکند؟ (تمام سطوح صیقلی و بدون اصطکاک می‌باشند.)



$$(1) \frac{2mg}{\sqrt{3}} \quad (2) \frac{mg}{\sqrt{3}}$$

$$(3) mg \quad (4) \frac{mg}{2}$$

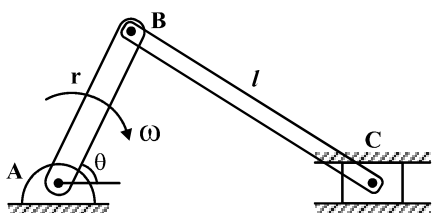
۲۳- لغزنده‌ای به جرم 1 kg آزادانه در امتداد میله منحنی شکل ثابت، از مکان A تا مکان B در صفحه قائم تحت اثر نیروی ثابت 10 N به وسیله طنابی حرکت داده می‌شود. اگر لغزنده از حالت سکون در A شروع به حرکت کند، سرعت آن هنگامی که به مکان B می‌رسد، چقدر است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



$$(1) \frac{\sqrt{2} m}{2 s} \quad (2) \frac{\sqrt{2} m}{s}$$

$$(3) \frac{2\sqrt{2} m}{s} \quad (4) \frac{2 m}{s}$$

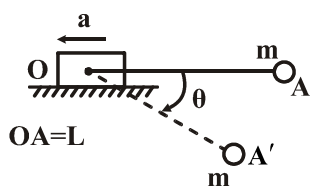
۲۴- در مکانیزم لنگ و لغزنده زیر بازوی AB با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. سرعت دورانی بازوی BC (ω_{BC}) کدام است؟



$$(1) \omega_{BC} = \frac{l\omega}{r} \times \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2} \sin^2 \theta}} \quad (2) \omega_{BC} = \frac{r\omega}{l} \times \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cos^2 \theta}}$$

$$(3) \omega_{BC} = \frac{l\omega}{r} \times \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2} \cos^2 \theta}} \quad (4) \omega_{BC} = \frac{r\omega}{l} \times \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}}$$

۲۵- در شکل مقابل لغزنده o با شتاب ثابت a حرکت می‌کند. اگر جرم m از حالت سکون در $\theta = 0$ رها شود. سرعت زاویه‌ای ریسمان بر حسب θ برابر کدام گزینه می‌باشد؟



$$(1) \omega = \sqrt{\frac{2}{L} [g \sin \theta + a(\cos \theta - 1)]}$$

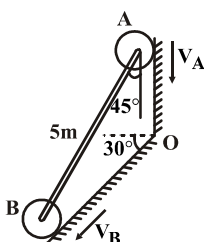
$$(2) \omega = \sqrt{\frac{2}{L} [g \sin \theta + a(\cos \theta + 1)]}$$

$$(3) \omega = \sqrt{\frac{2}{L} [g \cos \theta + a(\sin \theta - 1)]}$$

$$(4) \omega = \sqrt{\frac{2}{L} [g \cos \theta + a(\sin \theta + 1)]}$$

۲۶- غلتک B و A همواره در تماس با سطوح می‌باشند چنانچه سرعت غلتک A برابر $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، سرعت زاویه میله AB چقدر است؟

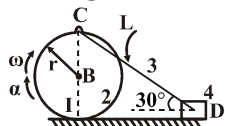
$$(\sin 75^\circ = 0.966)$$



$$(1) \frac{2}{1} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (2) \frac{0.85}{1} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$(3) \frac{1}{0.8} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (4) \frac{1}{0.5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

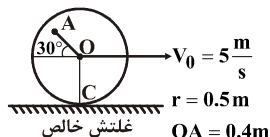
۲۷- در شکل مقابل دیسک ۲ با سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α حرکت غلتش خالص انجام می‌دهد. شتاب نقطه C برابر با چه عددی می‌باشد؟



$$a_c = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \quad (1) \quad a_c = r\sqrt{\omega^4 + 4\alpha^2} \quad (2)$$

$$a_c = L\omega^2 + r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \quad (3) \quad a_c = r\sqrt{\omega^4 + 2\alpha^2} \quad (4)$$

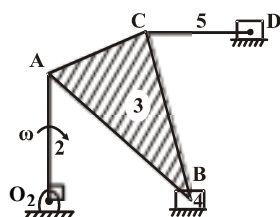
۲۸- در شکل مقابل دیسک بر روی سطح افقی حرکت غلتش خالص انجام می‌دهد. سرعت خطی مرکز دیسک $V_o = 5 \frac{m}{s}$ است. سرعت نقطه A برابر با کدام گزینه می‌باشد؟



$$\sqrt{51} \frac{m}{s} \quad (1) \quad \sqrt{41} \frac{m}{s} \quad (2)$$

$$\sqrt{21} \frac{m}{s} \quad (3) \quad \sqrt{61} \frac{m}{s} \quad (4)$$

۲۹- اگر در لحظه موردنظر میله CD افقی باشد سرعت نقطه D برابر با چه عددی است؟



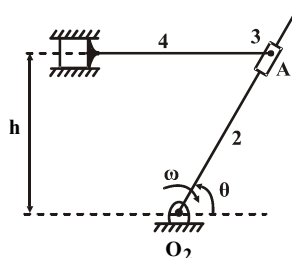
$$(O_2B \parallel CD)$$

$$O_2A = AC = CD$$

$$V_D = \frac{V_A}{2} \quad (1) \quad V_D = \frac{3}{2} V_A \quad (2)$$

$$V_D = V_A \quad (3) \quad V_D = 2V_A \quad (4)$$

۳۰- لینک ۲ با سرعت زاویه‌ای ω حول نقطه O_2 دوران می‌کند. سرعت لغزنده ۴ برابر است با:



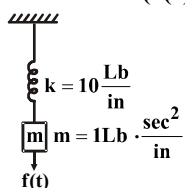
$$h\omega \cdot \sin \theta \quad (1) \quad \frac{h\omega}{\sin \theta} \quad (2)$$

$$h\omega \cdot \sin^2 \theta \quad (3) \quad \frac{h\omega}{\sin^2 \theta} \quad (4)$$

۳۱- بخشی از یک دستگاه مکانیکی به جرم $1/95 kg$ در یک میدان چسبنده و یسکوز می‌لرزد. اگر یک نیروی هماهنگ با دامنه $24/64 N$ در آهنگ (فرکانس) طبیعی دستگاه با پریود $2/2$ ثانیه آن را با دامنه $1/27$ سانتی‌متر بلرزاند، ضریب میرایی دستگاه چقدر است؟

$$56/4 \frac{N.s}{m} \quad (1) \quad 81/6 \frac{N.s}{m} \quad (2) \quad 73/2 \frac{N.s}{m} \quad (3) \quad 61/3 \frac{N.s}{m} \quad (4)$$

۳۲- پاسخ سیستم شکل روبرو به نیروی هارمونیک زیر کدام است؟ $(f(t) = 1 \sin \omega t + 1 \cos \omega t + 2 \sin t + 2 \cos 2t)$



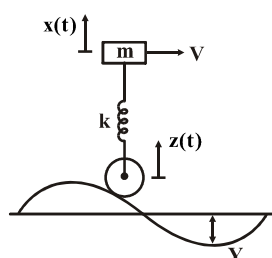
$$2 \cos t \quad (1)$$

$$3 \cos \omega t \quad (2)$$

$$1/3 \sin \omega t + 2/22 \sin t + 1/29 \cos \omega t + 3/3 \cos 2t \quad (3)$$

$$2 \cos t + 2 \sin 2t + 1 \sin \omega t + 1 \cos \omega t \quad (4)$$

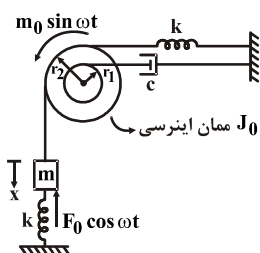
۳۳- شکل زیر نمونه ساده‌ای از یک خودرو را به هنگام گذر از ناهمواری‌های جاده نشان می‌دهد. دامنه لرزش برای سرعت‌های مختلف و خطرناک‌ترین تندی خودرو کدام است؟



$$V = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{X}{Y} = \frac{2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (1) \quad V = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{X}{Y} = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (2)$$

$$V = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{X}{Y} = \frac{2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (3) \quad V = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{X}{Y} = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (4)$$

۳۴- معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم زیر با فرض غلتش بر طبق گزینه‌های زیر کدام است؟ ($r_2 = 2r_1$)



$$(m + \frac{J_0}{r_1^2})\ddot{x} + r_1 c \dot{x} + \Delta k x = M_0 \sin \omega t - F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

$$(m + \frac{J_0}{4r_1^2})\ddot{x} + c \dot{x} + \Delta k x = \frac{M_0}{r_1} \sin \omega t - F_0 \cos \omega t \quad (2)$$

$$(m + \frac{J_0}{4r_1^2})\ddot{x} + \frac{c \dot{x}}{4} + r_1 k x = \frac{M_0}{2r_1} \sin \omega t - F_0 \cos \omega t \quad (3)$$

$$(m + \frac{J_0}{r_1^2})\ddot{x} + c \dot{x} + r_1 k x = M_0 \sin \omega t - F_0 \cos \omega t \quad (4)$$

۳۵- می‌خواهیم یک سیستم تهویه هوا به وزن 1000 N را روی پشت بام یک ساختمان نصب کنیم به علت نامیزانی در موتور، سیستم با فرکانس 60 Hz ارتعاش می‌کند، برای جداسازی ارتعاشات از ساختمان، سیستم را روی یک سری فنر با مجموع سختی k نصب می‌کنیم. در کدام از حالات زیر ارتعاشات کمتری به بدنه ساختمان منتقل می‌شود؟

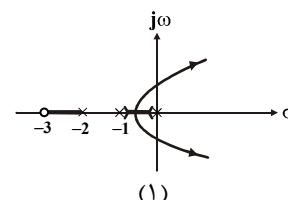
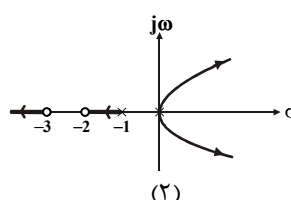
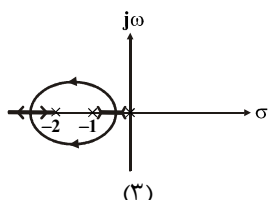
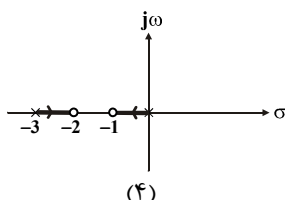
$$k = 4 \times 10^6 \quad (4)$$

$$k = 10^6 \quad (3)$$

$$k = 3 \times 10^6 \quad (2)$$

$$k = 2 \times 10^6 \quad (1)$$

۳۶- مکان هندسی ریشه‌های سیستم مشخص شده با معادله مشخصه روبرو برای $k > 0$ در کدام گزینه آمده است؟ $(1+k)s^2 + (1+\Delta k)s + 6k = 0$



۳۷- تابع تبدیل حلقه باز با فیدبک منفی واحد سیستمی به شکل $G(s) = \frac{k(s+3)}{s(s+1)(s+3)}$ می‌باشد. با فرض $k > 0$ و با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها کدام یک از عبارات زیر درست است؟

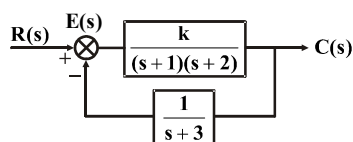
(۱) خطی که از نقطه -1 به موازات محور موهومی رسم می‌شود، مجانب مکان هندسی است.

(۲) فاصله $[0, -1]$, $[-\infty, -4]$ جزء مکان هندسی است.

(۳) سیستم ناپایدار است.

(۴) محل تقاطع مجانب‌ها با محور حقیقی در سمت راست محور موهومی است.

۳۸- به ازای چه مقدار k خطای حالت ماندگار سیستم کنترل نشان داده شده به ازای ورودی پله واحد برابر 0.06 خواهد شد؟



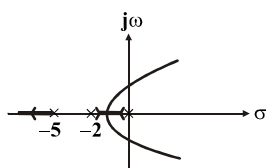
$$k = 94 \quad (1)$$

$$k = 100 \quad (2)$$

$$k = 6 \quad (3)$$

(۴) دستیابی این خطای ماندگار ممکن نیست.

۳۹- شکل زیر مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه یک سیستم کنترل را نشان می‌دهد. مقدار k و فرکانس نوسان (ω) بحرانی کدام است؟ (سیستم را با فیدبک واحد منفی در نظر بگیرید)



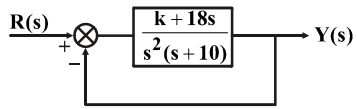
$$\omega = \sqrt{10} \text{ و } k_c = 35 \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{10} \text{ و } k_c = 70 \quad (2)$$

$$\omega = 2\sqrt{10} \text{ و } k_c = 35 \quad (3)$$

$$\omega = 2\sqrt{10} \text{ و } k_c = 70 \quad (4)$$

۴۰- به ازای کدام مقدار k مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته شکل زیر از نقطه $(-1 + j)$ می‌گذرد؟



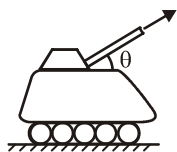
(۱) $k = ۱۶$

(۲) $k = ۱۰$

(۳) $k = ۱۶۰$

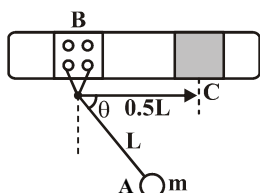
(۴) $k = ۱/۶$

۴۱- گلوله‌ای مطابق شکل توسط تانک با زاویه θ نسبت به افق پرتاب می‌شود. تانک از حالت سکون همزمان با پرتاب گلوله با چه شتابی حرکت کند تا اینکه گلوله بر روی خود تانک فرود آید؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید)



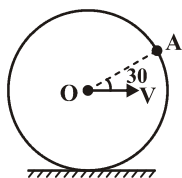
- (۱) $g \tan \theta$ (۲) $g \tan \theta$
(۳) $g \cot \theta$ (۴) $4g \cot \theta$

۴۲- آونگ ساده A به جرم m و طول L از نقطه B به جرم $\frac{m}{4}$ آویزان شده است. اگر سیستم از حالت سکون در $\theta = 0$ رها شود. هنگامیکه آونگ از وضعیت قائم عبور می‌کند آیا نقطه C به مانع برخورد می‌کند (اصطکاک ناچیز است)



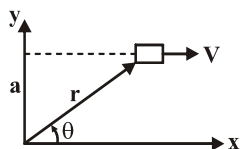
- (۱) برخورد می‌کند.
(۲) برخورد نمی‌کند.
(۳) جهت حرکت نقطه به سمت چپ است
(۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۴۳- مرکز دیسک نشان داده شده در شکل با سرعت V بر روی سطح می‌غلتد اگر سرعت زاویه‌ای دیسک ω باشد سرعت نقطه A در این لحظه برابر است با:



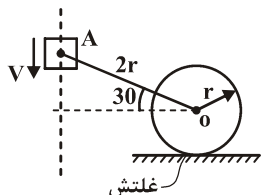
- (۱) $\sqrt{\frac{3}{2}}V$ (۲) $\sqrt{3}V$
(۳) V (۴) $\frac{3}{2}V$

۴۴- ذره‌ای مطابق شکل با سرعت ثابت V در مسیر افقی حرکت می‌کند مقدار \ddot{r} برابر است با:



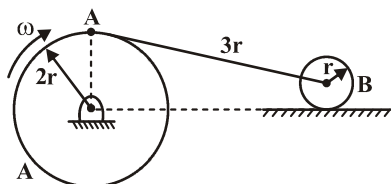
- (۱) $\frac{V}{a} \sin^2 \theta$ (۲) $\frac{V^2}{a} \sin^2 \theta$
(۳) $\frac{V}{a} \cos \theta \sin^2 \theta$ (۴) $\frac{V^2}{a} \sin^2 \theta$

۴۵- برای موقعیت نشان داده شده شتاب زاویه‌ای چرخ برابر است با:



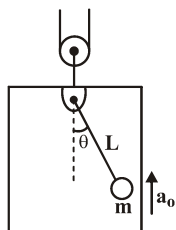
- (۱) $-\frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{v^2}{r^2} \bar{k}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{v^2}{r^2} \bar{k}$
(۳) $-\frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{v^2}{r^2} \bar{k}$ (۴) $\frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{v^2}{r^2} \bar{k}$

۴۶- دیسک A با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. سرعت زاویه‌ای دیسک B بعد از گذشت مدت زمان $t = \frac{\pi}{3\omega}$ (s) از لحظه نشان داده شده برابر است با:



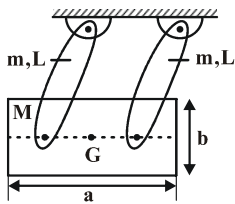
- (۱) ω (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3} \omega$
(۳) 2ω (۴) صفر

۴۷- آونگ ساده در بالابری قرار دارد. اگر آونگ به اندازه‌ی $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ از موقعیت قائم جابه‌جا شود و رها گردد. کشش T_0 در زمانی که $\theta = 0$ است



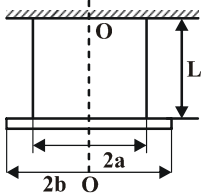
- برابر است با:
(۱) $m(g + a_0)$ (۲) $3m(g + a_0)$
(۳) $3m(g - a_0)$ (۴) $3mg$

۴۸- بلوکی به جرم M توسط دو میله باریک یکنواخت، هریک به جرم m و طول L آویزان شده است. فرکانس طبیعی نوسانات کوچک مجموعه کدام است؟



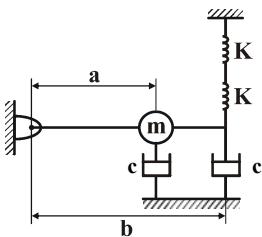
$$w_n = \sqrt{\frac{g}{L} \left(\frac{m+2M}{M+\frac{2}{3}m} \right)} \quad (۴) \quad w_n = \sqrt{\frac{g}{L} \left(\frac{m+2M}{M+\frac{2}{3}m} \right)} \quad (۳) \quad w_n = \sqrt{\frac{g}{L} \left(\frac{m+2M}{2M+\frac{2}{3}m} \right)} \quad (۲) \quad w_n = \sqrt{\frac{g}{L} \left(\frac{m+M}{M+\frac{2}{3}m} \right)} \quad (۱)$$

۴۹- یک میله به جرم m و طول $2b$ به صورت زیر در نظر بگیرید که توسط دو کابل به صورت افقی آویزان شده است. فرکانس نوسانات چرخش افقی (چرخش حول محور $O-O$) کدام است؟



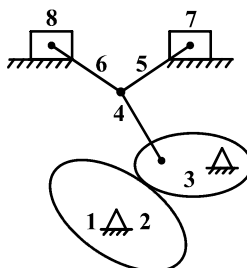
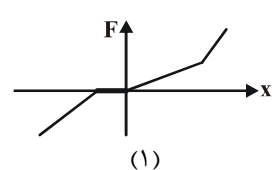
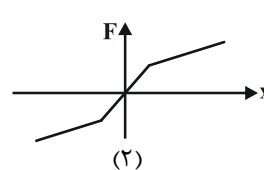
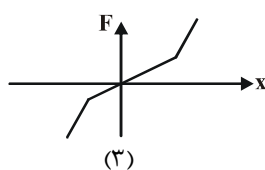
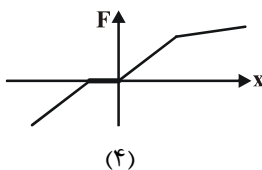
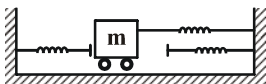
$$w_n = \sqrt{\frac{12ga}{L} \cdot \frac{a^2}{b^2}} \quad (۴) \quad w_n = \sqrt{\frac{12ga}{L} \cdot \frac{a^2}{b^2}} \quad (۳) \quad w_n = \sqrt{\frac{12ga}{L} \cdot \frac{a^2}{b^2}} \quad (۲) \quad w_n = \sqrt{\frac{12ga}{L} \cdot \frac{a^2}{b^2}} \quad (۱)$$

۵۰- برای سیستم شکل زیر میزان فرکانس طبیعی میرا کدام است؟



$$\sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{c}{m} \right)^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right)} \quad (۴) \quad \sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{c}{m} \right)^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right)} \quad (۱) \quad \sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{c}{m} \right)^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right)} \quad (۳) \quad \sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{c}{m} \right)^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right)} \quad (۲)$$

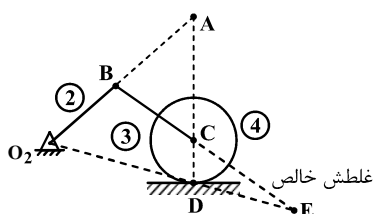
۵۱- منحنی نیرو - تغییر مکان سیستم زیر کدام است؟ (ثابت فنرها مساوی K است).



۵۲- در مکانیزم زیر، تعداد درجات آزادی چقدر است؟

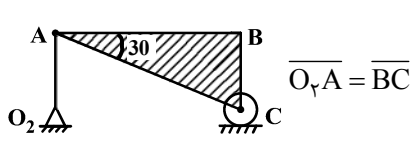
- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۱

۵۳- در شکل روبرو مرکز آنی ۱۳ کجا قرار دارد؟



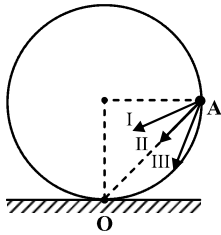
- (۱) C
(۲) D
(۳) E
(۴) A

۵۴- با توجه به مکانیزم روبرو و توجه به اینکه سرعت نقطه A، V باشد سرعت خطی نقطه C چقدر است؟



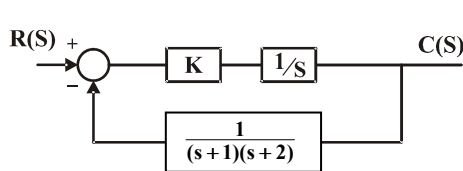
(۱) $2V$
(۲) $V \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) V
(۴) $\frac{V}{2}$

۵۵- با توجه به اینکه سرعت زاویه‌ای دیسک به شعاع ۱۲cm، $\sqrt{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و شتاب زاویه‌ای آن $5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ است کدام بردار شتاب نسبی نقطه A نسبت به مرکز دوران را صحیح نشان می‌دهد؟



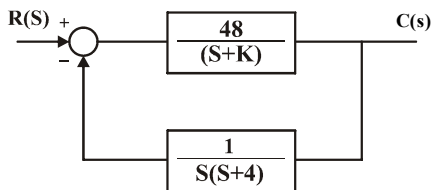
- (۱) بردار II و اندازه آن $60\sqrt{2}$ است.
(۲) بردار I و اندازه آن $12\sqrt{30}$ است.
(۳) بردار III و اندازه آن $60\sqrt{2}$ است.
(۴) بردار II و اندازه آن $12\sqrt{30}$ است.

۵۶- به ازای چه مقداری از K، سیستم مدار بسته زیر به ازای ورودی شیب واحد دارای خطای حالت ماندگار برابر با $\frac{1}{4}$ است؟



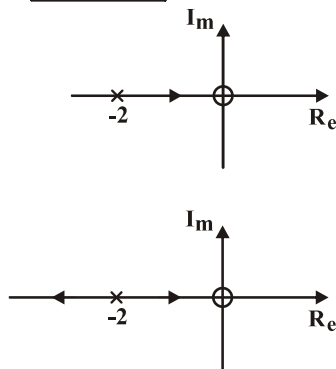
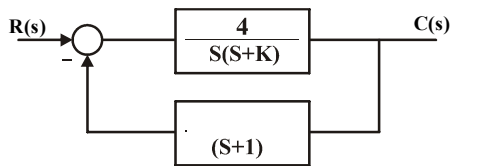
- (۱) $K = \frac{1}{8}$
(۲) $K = 4$
(۳) $K = 8$
(۴) چنین K وجود ندارد

۵۷- به ازای چه محدوده‌ای از K سیستم مدار بسته زیر پایدار است؟



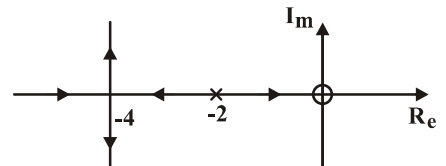
- (۱) $-6 < K < -4$
(۲) $K < -6$ و $K > 2$
(۳) $-6 < K < 2$
(۴) $K < -4$ و $K > -6$

۵۸- مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم نشان داده شده برحسب تغییرات K کدام یک از شکل‌های زیر می‌باشد؟

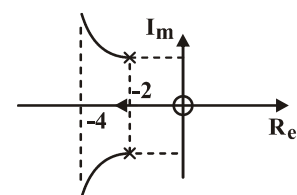


(۲)

(۴)

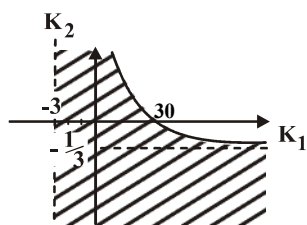
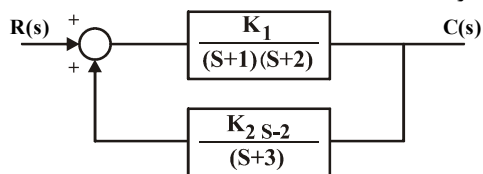


(۱)

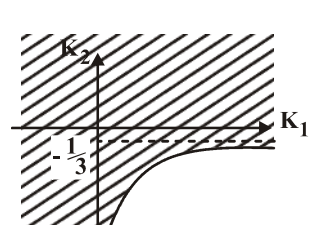


(۳)

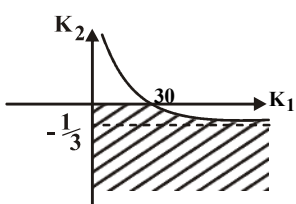
۵۹- در سیستم کنترل شکل زیر K_1 و K_2 در چه ناحیه‌ای تغییر می‌کند تا سیستم پایدار بماند.



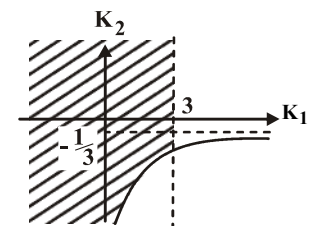
(۲)



(۱)

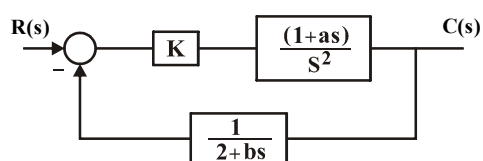


(۴)



(۳)

۶۰- برای سیستم زیر با توجه به این که $a > 0$ و b و K راجع به پایداری سیستم کنترلی می‌توان گفت که:



(۱) سیستم حلقه بسته به ازای $a = b$ پایدار است.

(۲) سیستم حلقه بسته برای $a > 2b$ پایدار است.

(۳) سیستم حلقه بسته برای $b > 2a$ پایدار است.

(۴) سیستم حلقه بسته همواره ناپایدار است.

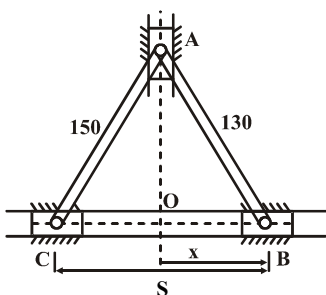
۶۱- دو اتومبیل با سرعت‌های V_1 و V_2 به سمت هم در حال حرکت هستند. در یک لحظه رانندگان اتومبیل‌ها، همدیگر را دیده و بلافاصله ترمز می‌کنند. اگر شتاب ترمز هر دو اتومبیل a باشد، کمترین فاصله دو اتومبیل چقدر باشد تا با هم تصادف نکنند؟

$$\frac{(V_1 + V_2)^2}{2a} \quad (۴) \quad \frac{V_1^2 - V_2^2}{4a} \quad (۳) \quad \frac{(V_1 + V_2)^2}{4a} \quad (۲) \quad \frac{V_1^2 + V_2^2}{2a} \quad (۱)$$

۶۲- پرتابه‌ای با سرعت V_0 به گونه‌ای شلیک می‌شود که از دو نقطه که هر دو به یک ارتفاع از سطح قرار دارند، بگذرد. فاصله افقی این دو نقطه چقدر باشد تا برد پرتابه، بیشینه مقدار خود را داشته باشد؟ (h ، ارتفاع دونقطه از سطح زمین می‌باشد)

$$d = 2V_0 \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (۴) \quad d = \frac{V_0}{g} \sqrt{V_0^2 - 4gh} \quad (۳) \quad d = \frac{V_0}{g} \sqrt{V_0^2 - gh} \quad (۲) \quad d = \frac{V_0}{2g} \quad (۱)$$

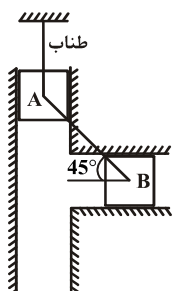
۶۳- در لحظه نشان داده شده $\dot{S} = 2 \frac{m}{s}$ ، $x = 50 \text{ mm}$ سرعت متناظر با نقطه A کدام است؟ ($AB = 130 \text{ mm}$, $AC = 150 \text{ mm}$)



$$\frac{9}{7} \frac{m}{s} \quad (۲) \quad \frac{15}{28} \frac{m}{s} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{7} \frac{m}{s} \quad (۴) \quad \frac{5}{12} \frac{m}{s} \quad (۳)$$

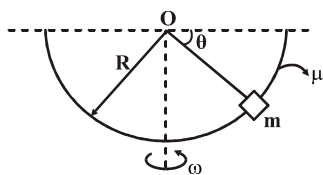
۶۴- میله AB به طول L و به جرم m در حال سکون که در شکل نشان داده شده است، قرار دارد. اگر طناب را بسوزانیم، مقدار شتاب زاویه‌ای میله برحسب $\frac{\text{rad}}{s^2}$ چقدر است؟ (مکعب‌های A و B بدون جرم و سطوح بدون اصطکاک هستند)



$$\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{2L} \quad (۲) \quad \alpha = \frac{\sqrt{2}g}{2L} \quad (۱)$$

$$\alpha = \frac{3\sqrt{2}g}{4L} \quad (۴) \quad \alpha = \frac{3\sqrt{2}g}{2L} \quad (۳)$$

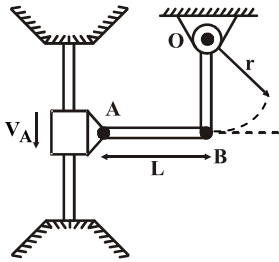
۶۵- جرم m می‌تواند در امتداد میله نیم دایره‌ای به شعاع R و ضریب اصطکاک μ ، لغزش کند. اگر این میله حول محور قائم با سرعت زاویه‌ای ω دوران کند، رابطه بین سرعت زاویه‌ای ω و زاویه θ (حالت تعادل مکانیکی جرم m در سیستم) کدام گزینه است؟



$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \mu \tan \theta}{\mu \cos \theta - \sin \theta}} \cdot \frac{g}{R} \quad (۲) \quad \omega = \sqrt{\frac{1 + \mu \tan \theta}{\mu \cos \theta + \sin \theta}} \cdot \frac{g}{R} \quad (۱)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1 - \mu \tan \theta}{\mu \cos \theta + \sin \theta}} \cdot \frac{g}{R} \quad (۴) \quad \omega = \sqrt{\frac{1 - \mu \tan \theta}{\mu \cos \theta - \sin \theta}} \cdot \frac{g}{R} \quad (۳)$$

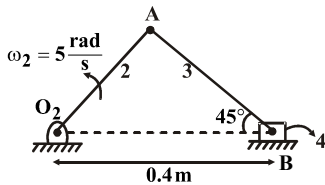
۶۶- بوش لغزنده به طرف بالا و پایین محور عمودی می تواند حرکت کند و لنگ OB را به نوسان در آورد. اگر سرعت A به هنگام عبور از وضعیتی که AB افقی و OB عمودی است، تغییر نکند، شتاب زاویه لنگ OB در آن وضعیت کدام است؟



$$\frac{V_A^2}{rL} \quad (2) \quad \frac{V_A^2}{r+L} \quad (1)$$

$$\frac{V_A^2}{L(r+L)} \quad (4) \quad \frac{V_A^2}{r(r+L)} \quad (3)$$

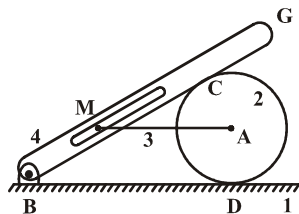
۶۷- در مکانیزم شکل مقابل سرعت زاویه ای عضو O_۲A برابر $\omega_2 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است. اگر در لحظه نشان داده شده در شکل $O_2B = 0.4 \text{ m}$ باشد، سرعت لغزنده ۴ برابر است با:



$$V_4 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2) \quad V_4 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1)$$

$$V_4 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4) \quad V_4 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3)$$

۶۸- در مکانیزم شکل زیر مرکز آبی دوران ۳۴ یعنی I_{۳۴} کدام نقطه است؟



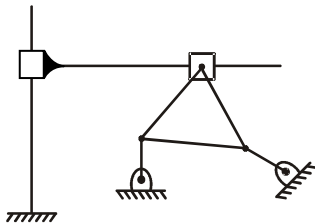
(۱) نقطه M

(۲) محل تلاقی AC , BD

(۳) نقطه C

(۴) در امتداد AC قرار دارد.

۶۹- مکانیزم شکل مقابل دارای چند درجه آزادی است؟



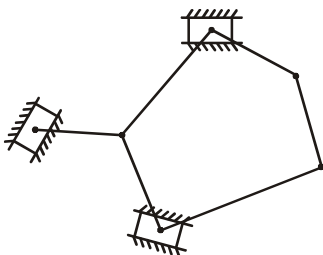
(۱) صفر

(۲) یک

(۳) دو

(۴) سه

۷۰- درجه آزادی مکانیزم شکل زیر برابر با کدام گزینه است؟



(۱) صفر

(۲) یک

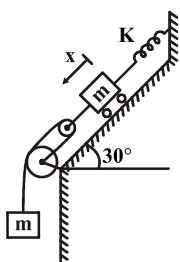
(۳) دو

(۴) سه

۷۱- یک شتاب سنج، فرکانس لرزش یک سازه را ۸۲۱ هرتز نشان می دهد. اگر شتاب بیشینه $50g$ باشد دامنه و سرعت بیشینه چقدر است؟

$$8/032 \text{ و } 4/22 \quad (4) \quad 7/092 \text{ و } 0/36 \quad (3) \quad 0/0314 \text{ و } 0/021 \quad (2) \quad 0/952 \text{ و } 0/0018 \quad (1)$$

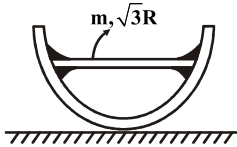
۷۲- با توجه به شکل مقابل با صرف نظر کردن از جرم قرقره ها و اصطکاک، فرکانس طبیعی نوسانات کدام گزینه می باشد؟



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\Delta m}} \quad (2) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{3m}} \quad (1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{\Delta m}} \quad (4) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad (3)$$

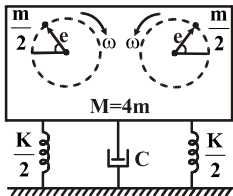
۷۳- میله یکنواخت به طول $\sqrt{3}R$ و جرم m در داخل یک حلقه دایره‌ای شکل بدون وزن به شعاع R جوش داده شده است. با فرض غلتش بدون لغزش، فرکانس طبیعی برای نوسانات کوچک کدام گزینه است؟



$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2R}} \quad (2) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{3g}{R}} \quad (1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{R}} \quad (4) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (3)$$

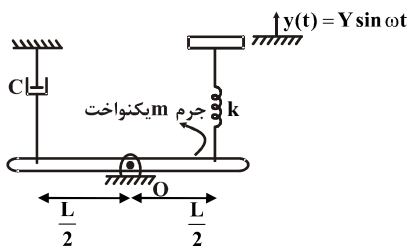
۷۴- سیستم ارتعاشی زیر را در نظر بگیرید ($M = 4m$)، که دارای دو جرم خارج از مرکز $\frac{m}{4}$ می‌باشد و در خلاف جهت هم با خروج از مرکز e با سرعت زاویه‌ای متغیر ω دوران می‌کنند. ضریب میرایی $\xi = 0.5$ می‌باشد. اگر در فرکانس تشدید دامنه نوسان X_{res} یک میلی‌متر باشد، ماکزیمم مقدار دامنه X_{max} کدام است؟



$$\sqrt{\frac{4}{3}} \text{ mm} \quad (2) \quad \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ mm} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{8}{9}} \text{ mm} \quad (4) \quad \sqrt{\frac{5}{4}} \text{ mm} \quad (3)$$

۷۵- دامنه پایدار دوران زاویه‌ای θ حول نقطه O در سیستم روبرو کدام است؟ (زاویه دوران θ را کوچک در نظر بگیرید)



$$\frac{kY}{2L\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2) \quad \frac{kY}{L\sqrt{(k - \frac{m\omega^2}{3})^2 + (c\omega)^2}} \quad (1)$$

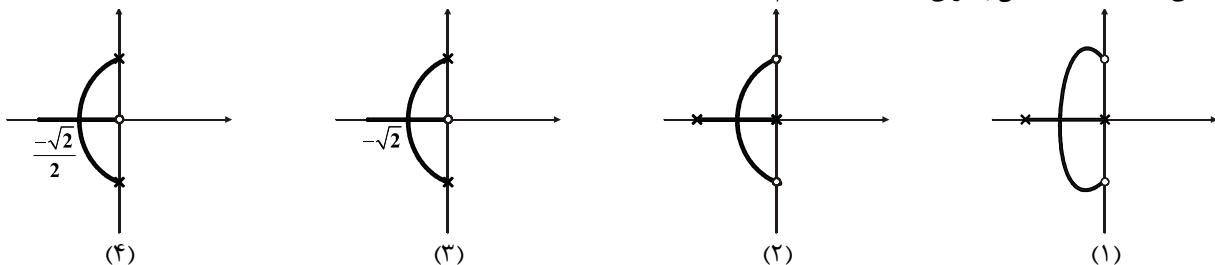
$$\frac{2kY}{L\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (4) \quad \frac{2kY}{L\sqrt{(k - \frac{m\omega^2}{3})^2 + (c\omega)^2}} \quad (3)$$

۷۶- اگر معادله مشخصه یک سیستم کنترلی به فرم $s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 9s + 9s^2 + 9s^3 + 7s^2 + 3s + 2 = 0$ باشد، برای بررسی پایداری سیستم چند مرتبه باید از معادله کمکی استفاده کرد؟

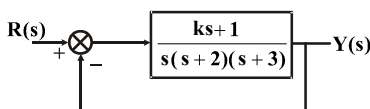
(۱) یک مرتبه (۲) دو مرتبه (۳) سه مرتبه (۴) به معادله کمکی احتیاج نیست

۷۷- برای یک سیستم کنترلی با فیدبک واحد منفی تابع تبدیل حلقه باز به صورت $G(s)H(s) = \frac{2(s^2 + 3)}{2s(s + a)}$ می‌باشد. منحنی مکان هندسی

ریشه‌های معادله مشخصه آن به ازای $0 < a < \infty$ کدام است؟



۷۸- در سیستم شکل زیر به ازای چه مقادیری برای k خطای حالت دائمی به ازای ورودی پله واحد صفر می‌باشد؟

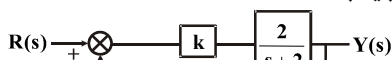


$$k > -\frac{29}{5} \quad (2) \quad k \text{ به ازای همه مقادیر} \quad (1)$$

$$k > +6 \quad (4) \quad k \text{ به ازای هیچ مقداری از} \quad (3)$$

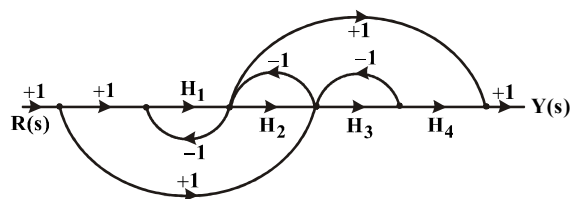
۷۹- یک موتور محرکه جریان مستقیم دارای تابع تبدیل $\frac{2}{s+2}$ می‌باشد. این موتور محرکه پاسخ زمانی کندی دارد. به همین دلیل برای این‌که

پاسخ سیستم را 10° برابر سریع‌تر کنیم از مدار کنترلی فیدبک زیر استفاده می‌کنیم. مقدار k چقدر باید باشد؟



$$2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۸۰- تابع تبدیل بین $R(s)$ و $Y(s)$ برای نمودار بلوکی زیر برابر است با:



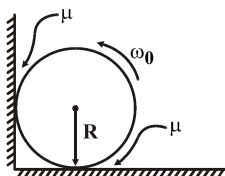
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 + H_1 H_3 H_4 + H_2 H_4 + H_1}{1 + H_1 + H_2 + H_3} \quad (۱)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 + H_3 H_2 H_1 + H_3 H_4}{H_1 + H_2 + H_3 + H_1 H_3} \quad (۲)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 + H_1 H_3 H_4 + H_3 H_4 + H_1 H_3 + H_1 - 1}{1 + H_1 + H_2 + H_3 + H_1 H_3} \quad (۳)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 + H_1 H_3 H_4 + H_1 H_3 + H_1}{1 + H_1 + H_2 + H_3} \quad (۴)$$

۸۱- کره توپری به جرم m و شعاع R را حول محور افقی اش با سرعت زاویه‌ای ω_0 به دوران در می‌آوریم و سپس آن را در مقابل کنج یک دیوار قرار می‌دهیم. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین تمام سطوح تماس μ باشد و کره هیچ‌گاه از دیواره‌ها جدا نشود، مدت زمان لازم برای متوقف شدن کره چقدر است؟

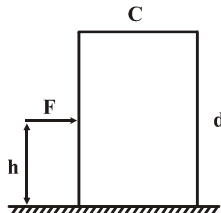


$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2}{5} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \frac{R\omega_0}{g} \\ (2) \quad & \frac{2}{5} \left(\frac{1+\mu}{1+\mu} \right) \frac{R\omega_0}{\mu g} \\ (3) \quad & \frac{2}{5} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \frac{R\omega_0}{g} \\ (4) \quad & \frac{2}{5} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \frac{R\omega_0}{\mu g} \end{aligned}$$

۸۲- میله‌ای به طول L و جرم واحد p حول محوری که از وسطش می‌گذرد، در حال چرخش با سرعت زاویه‌ای ω_0 است میله به آرامی روی زمین قرار داده می‌شود تا در اثر اصطکاک با زمین متوقف شود. اگر ضریب اصطکاک میله با زمین μ باشد، زمان لازم برای توقف کامل میله چقدر است؟

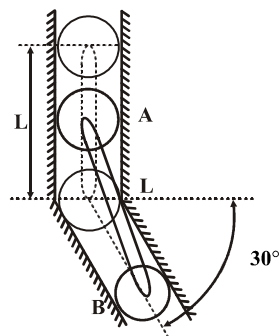
$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2\omega_0 L}{3\mu g} \\ (2) \quad & \frac{3\omega_0 L}{\mu g} \\ (3) \quad & \frac{\omega_0 L}{3\mu g} \\ (4) \quad & \frac{\omega_0 L}{6\mu g} \end{aligned}$$

۸۳- نیروی F به یک جعبه همگن به جرم m اعمال می‌شود. ضریب اصطکاک بین جعبه و زمین μ است. مینیمم مقدار h (فاصله محل اعمال نیروی F تا زمین) چقدر باشد تا جعبه بدون واژگون شدن روی صفحه بلغزد و جلو برود؟



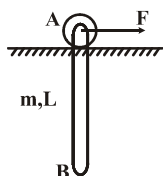
$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{d}{2} - \frac{mg\mu d}{2F} - \frac{mgc}{2F} \\ (2) \quad & \frac{d}{2} + \frac{mg\mu d}{2F} + \frac{mgc}{2F} \\ (3) \quad & \frac{d}{2} - \frac{mg\mu d}{2F} + \frac{mgc}{2F} \\ (4) \quad & \frac{d}{2} + \frac{mg\mu d}{2F} - \frac{mgc}{2F} \end{aligned}$$

۸۴- میله یکنواخت باریکی به طول L از حالت سکون در وضعیت نقطه چین نشان داده شده رها می‌شود. زمانی که سر A به شیب 30° درجه برخورد می‌کند، سرعت سر B چقدر است؟ (از جرم غلتک‌ها و اصطکاک صرف‌نظر کنید.)



$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt{gL} \\ (2) \quad & \sqrt{\frac{gL}{3}} \\ (3) \quad & \frac{\sqrt{3gL}}{2} \\ (4) \quad & \sqrt{3gL} \end{aligned}$$

۸۵- میله یکنواختی به طول ۲ متر و جرم ۳ کیلوگرم در حال سکون می‌باشد. نیروی افقی 10 نیوتون در نقطه A وارد می‌شود. شتاب نقطه A در لحظه اولیه اعمال نیرو و شتاب زاویه‌ای میله به ترتیب کدام است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad & a_A = \frac{40}{3} \text{ و } \alpha = 50^\circ \\ (2) \quad & a_A = \frac{40}{3} \text{ و } \alpha = 10^\circ \\ (3) \quad & a_A = \frac{20}{3} \text{ و } \alpha = 10^\circ \\ (4) \quad & a_A = \frac{20}{3} \text{ و } \alpha = 5^\circ \end{aligned}$$

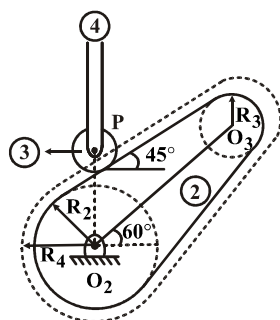
۸۶- کدام یک از عبارات زیر نادرست است؟

- (۱) مشکل اصلی استفاده از بادامک‌های با پیرو سرعت این است که در نقاطی از حرکت پیرو شتاب آن و در نتیجه نیروی اینرسی نامحدود می‌شود.
- (۲) چرخ لنگر برای ذخیره انرژی جنبشی و یکنواخت نمودن جریان انرژی بین منبع قدرت و مصرف کننده کاربرد دارد.

(۳) در چرخ لنگر ضریب تغییرات سرعت به صورت روبرو است: $c = \frac{2(\omega_{\max} + \omega_{\min})}{\omega_{\max} - \omega_{\min}}$

(۴) زاویه فشار در یک بادامک عبارت است از زاویه بین عمود مشترک بادامک و پیرو با مسیر حرکت پیرو

۸۷- در شکل زیر بادامک با سرعت 100 rpm دوران می‌کند. اگر $O_3P = 5 \text{ cm}$ و $R_3 = 3 \text{ cm}$ و $R_2 = 15 \text{ cm}$ و شعاع دایره گام $R_4 = 45 \text{ cm}$ و $O_3P = 5 \text{ cm}$ باشد، سرعت لینک ۴ بر حسب متر بر ثانیه کدام است؟



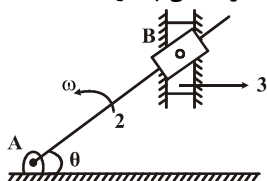
$$(1) \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{5\pi}{3}$$

$$(3) \frac{3\pi}{2}$$

$$(4) \frac{5\pi}{3\sqrt{2}}$$

۸۸- در مکانیزم شکل زیر عضو ۲ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول نقطه A دوران می‌کند. نسبت نیروی اینرسی لغزنده ۳ به سرعت آن چقدر است؟



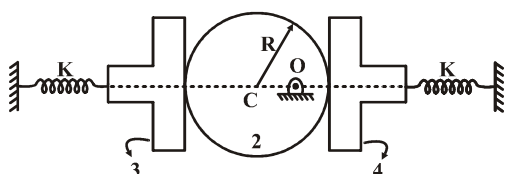
$$(1) m\omega \tan \theta$$

$$(2) 2m\omega \tan \theta$$

$$(3) m\omega \cot \theta$$

$$(4) 2m\omega \cot \theta$$

۸۹- در شکل مقابل دو فنر در سمت راست و چپ، با ثابت فنر k تماس دائمی بین پیروها و دیسک را فراهم می‌کنند. اگر $CO = e$ باشد و سرعت زاویه دیسک ω باشد، سرعت پیرو شماره ۴ و شتاب پیرو شماره ۳ کدام است؟



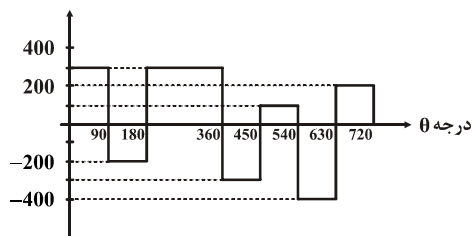
$$(1) e\omega \cos \theta, \quad +\frac{e\omega^2 \cos \theta}{2}$$

$$(2) e\omega \sin \theta, \quad -e\omega \cos^2 \theta$$

$$(3) e\omega \cos \theta, \quad -e\omega \sin \theta$$

$$(4) e\omega \sin \theta, \quad +e\omega^2 \cos \theta$$

۹۰- نمودار گشتاور خروجی یک موتور تک سیلندر در شکل زیر به نمایش در آمده است. موقعیت‌هایی که در آن‌ها سرعت لنگ حداکثر و حداقل است، برابر با کدام گزینه است؟



$$(1) \text{حداکثر در } 270^\circ - \text{حداقل در } 630^\circ$$

$$(2) \text{حداکثر در } 360^\circ - \text{حداقل در } 630^\circ$$

$$(3) \text{حداکثر در } 200^\circ - \text{حداقل در } 200^\circ$$

$$(4) \text{حداکثر در } 270^\circ - \text{حداقل در صفر درجه}$$

۹۱- پایه یک سیستم جرم - فنر با سرعت $\dot{y}(t) = 20(u(t) - 5)$ برانگیخته می‌شود. با فرض شرایط اولیه صفر و $m = 1 \text{ kg}$ و $k = 100 \text{ N/m}$ ،

زمان متناظر با حداکثر جابه‌جایی جسم (t_n) از کدام رابطه زیر به دست می‌آید؟

$$(1) t_p = \frac{\tan^{-1} 2}{10} \quad (2) t_p = \frac{\sin^{-1} 2}{10} \quad (3) t_p = \frac{\tan^{-1} 4}{10} \quad (4) t_p = \frac{\sin^{-1} 4}{10}$$

۹۲- نیروی $F(t) = F_0 e^{-at}$ به یک سیستم جرم - فنر وارد می‌شود. پاسخ سیستم برای شرایط اولیه صفر یعنی $\dot{x}(0) = x(0) = 0$ کدام است؟

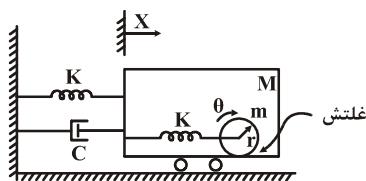
$$(1) x(t) = \frac{F_0}{m(a^2 + \omega_n^2)} \left[-\sin \omega_n t + \frac{a}{\omega_n} \cos \omega_n t + e^{-at} \right]$$

$$(2) x(t) = \frac{F_0}{m(a^2 + \omega_n^2)} \left[\sin \omega_n t - \frac{a}{\omega_n} \cos \omega_n t + e^{-at} \right]$$

$$(3) x(t) = \frac{F_0}{m(a^2 + \omega_n^2)} \left[-\cos \omega_n t + \frac{a}{\omega_n} \sin \omega_n t + e^{-at} \right]$$

$$(4) x(t) = \frac{F_0}{m(a^2 + \omega_n^2)} \left[\cos \omega_n t - \frac{a}{\omega_n} \sin \omega_n t + e^{-at} \right]$$

۹۳- با فرض غلتش خالص برای دیسک، معادلات حرکتی سیستم روبرو کدام است؟ (جرم اتاقک برابر M و شعاع دیسک r می باشد).



$$M\ddot{x} + c\dot{x} + \tau kx - kr\ddot{\theta} = 0$$

$$m(\ddot{x} + r\ddot{\theta}) + kr\theta - kx = 0 \quad (1)$$

$$\tau M\ddot{x} + mr\ddot{\theta} + \tau c\dot{x} + \tau kx - \tau kr\ddot{\theta} = 0$$

$$m(\ddot{x} + \frac{\tau}{r}\ddot{\theta}) + kr\theta = 0 \quad (2)$$

$$M\ddot{x} - mr\ddot{\theta} + c\dot{x} + \tau kx - \tau kr\ddot{\theta} = 0$$

$$m(\ddot{x} + r\ddot{\theta}) + kr\theta - kx = 0 \quad (3)$$

$$M\ddot{x} - mr\ddot{\theta} + c\dot{x} + \tau kx - \tau kr\ddot{\theta} = 0$$

$$m(\ddot{x} + \frac{\tau}{r}\ddot{\theta}) + kr\theta - kx = 0 \quad (4)$$

۹۴- معادلات حرکت سیستمی به قرار زیر است. فرکانس‌های طبیعی مدهای طبیعی این سیستم کدام گزینه است؟

$$\ddot{x} = -(x - y) - x$$

$$\tau \ddot{y} = (x - y) - y$$

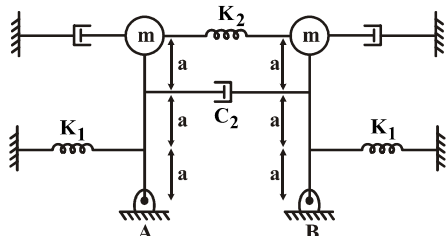
$$\left\{ \begin{matrix} -2/74 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0/74 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \sqrt{3/24}, \sqrt{1/35} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} -0/12 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0/36 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \sqrt{5/2}, \sqrt{1/42} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 0/34 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -0/35 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \sqrt{1/9}, \sqrt{0/9} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{matrix} -0/36 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 1/27 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \sqrt{2/36}, \sqrt{0/63} \quad (3)$$

۹۵- فرکانس‌های نوسان میرا (ω_d) برای سیستم نشان داده شده، کدام است؟



$$\omega_{d1} = \sqrt{\frac{k_1 a - \tau mg}{\tau ma} - \frac{c_1^2}{\tau m^2}} \quad (2)$$

$$\omega_{d\tau} = \sqrt{\frac{(k_1 + \lambda k_\tau) a - \tau mg}{\tau ma} - \frac{(\tau c_1 + \lambda c_\tau)^2}{\tau^2 \tau m^2}} \quad (4)$$

$$\omega_{d1} = \sqrt{\frac{k_1 a - mg}{\tau ma} - \frac{c_1^2}{m^2}} \quad (3)$$

$$\omega_{d\tau} = \sqrt{\frac{(k_1 a + \epsilon k_\tau a) - mg}{\epsilon ma} - \frac{(\lambda c_1 + \epsilon c_\tau)^2}{\tau^2 \tau m^2}} \quad (4)$$

$$\omega_{d1} = \sqrt{\frac{k_1 a - \tau mg}{\tau ma} - \frac{c_1^2}{\tau m^2}} \quad (1)$$

$$\omega_{d\tau} = \sqrt{\frac{(k_1 + \lambda k_\tau) a - \tau mg}{\tau ma} - \frac{(\tau c_1 + \lambda c_\tau)^2}{\tau^2 \tau m^2}} \quad (3)$$

$$\omega_{d1} = \sqrt{\frac{k_1 a - mg}{\tau ma} - \frac{c_1^2}{m^2}} \quad (3)$$

$$\omega_{d\tau} = \sqrt{\frac{k_1 a - \epsilon mg}{\lambda ma} - \frac{(\tau c_1 + c_\tau)^2}{\tau^2 \lambda m^2}} \quad (3)$$

۹۶- یک سیستم کنترلی با فیدبک واحد منفی دارای تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \frac{1}{s+3}$ می باشد. خروجی حالت ماندگار سیستم را به ازای ورودی $r(t) = \tau \cos(4t + \frac{\pi}{4})$ برابر با کدام گزینه است؟

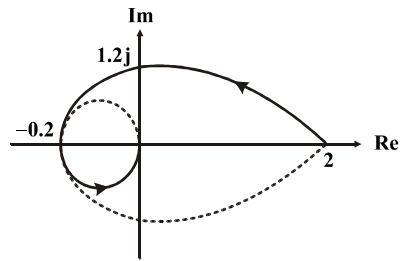
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(4t + \frac{\pi}{4}) \quad (4) \quad y(t) = \sqrt{2} \cos(4t + \frac{\pi}{4}) \quad (2)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \cos 4t \quad (2) \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(4t) \quad (1)$$

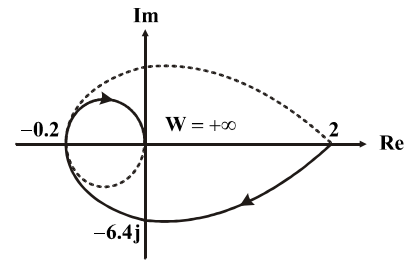
۹۷- دیاگرام نایکوئیست $G(s) = \frac{12}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ در کدام گزینه رسم شده است؟

(۲)

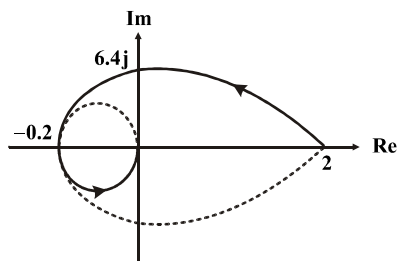
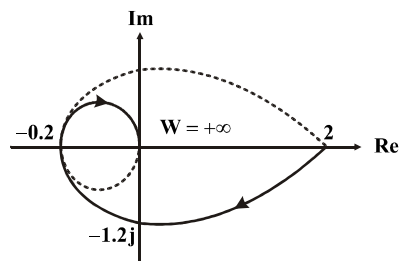
(۱)



(۴)



(۳)



۹۸- تابع تبدیل مدار باز یک سیستم به صورت $\frac{2}{s(s^2 + 0.5s + 1)}$ است. حد بهره آن برابر با کدام گزینه است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

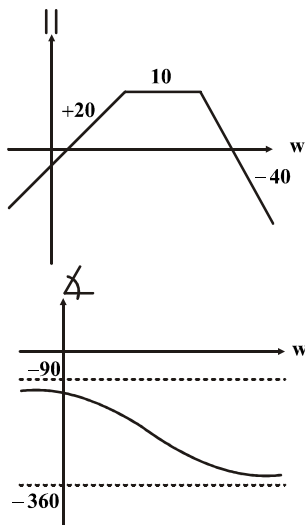
- کدام گزینه با توجه به دیاگرام بود رسم شده درست است؟

(۱) سیستم پایدار است: $GM > 0$, $PM > 0$

(۲) سیستم ناپایدار است: $GM < 0$, $PM < 0$

(۳) سیستم ناپایدار است: $GM > 0$, $PM < 0$

(۴) سیستم ناپایدار است: $GM < 0$, $PM > 0$



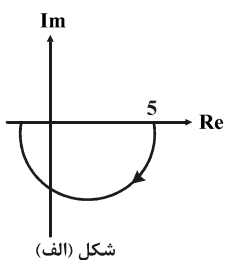
۱۰۰- دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل مدار باز $G(j\omega)$ در شکل (الف) زیر آورده شده است. در سیستمی با شکل (ب) پس خوانند واحد منفی خروجی حالت ماندگار کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$

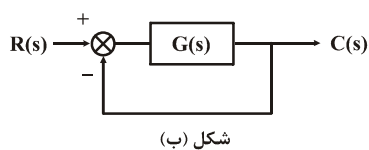
(۲) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{6}{5}$

(۴) $\frac{5}{6}$

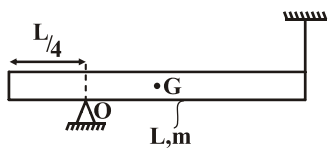


شکل (الف)



شکل (ب)

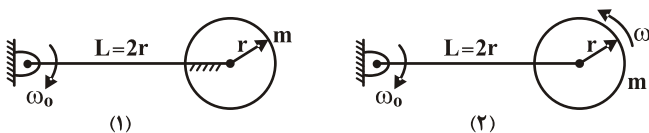
۱۰۱- تیر افقی به وزن $w = mg$ در فاصله $\frac{L}{4}$ از لبه سمت چپ مفصل شده است. در لحظه بعد از پاره شدن طناب کدام گزینه صحیح می‌باشد؟



- (۱) عکس‌العمل تکیه‌گاه در مفصل برابر $0.5W$ می‌باشد.
- (۲) عکس‌العمل تکیه‌گاه در مفصل کوچکتر از $0.5W$ می‌باشد.
- (۳) عکس‌العمل تکیه‌گاه در مفصل بزرگتر از $0.5W$ می‌باشد.
- (۴) عکس‌العمل تکیه‌گاه در مفصل بزرگتر از $0.6W$ می‌باشد.

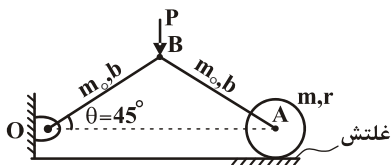
۱۰۲- نسبت مومنتمم زاویه‌ای دیسک $\frac{H_{O_1}}{H_{O_2}}$ ، در حالتیکه دیسک به میله جوش شده و زمانیکه دیسک جوش نشده و با سرعت زاویه‌ای $\omega = 2\omega_0$

دوران می‌کند برابر است با:



- (۱) $\frac{9}{7}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{9}{5}$
- (۴) $\frac{9}{11}$

۱۰۳- نیروی ثابت $p = mg$ به نقطه‌ی B از مکانیزم نشان داده شده اثر می‌کند سرعت زاویه‌ای ω لینک AB در لحظه‌ای که لینک OB از وضعیت افق می‌گذرد برابر است با:



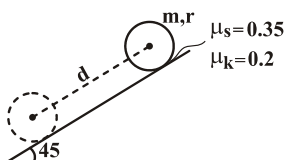
(۲) صفر

(۴) $\sqrt{6 \frac{g}{b}}$

(۱) $\sqrt{2\sqrt{3} \frac{g}{b}}$

(۳) $\sqrt{3\sqrt{2} \frac{g}{b}}$

۱۰۴- دیسکی به جرم m و شعاع r مطابق شکل رها می‌شود. مرکز جرم آن به اندازه‌ی b جابه‌جا می‌شود. چه مقدار انرژی در این جابه‌جایی تلف شده است؟



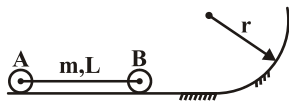
(۲) $\frac{35}{200} \sqrt{2} mgd$

(۴) صفر

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{10} mgd$

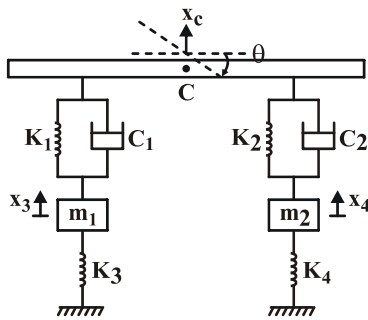
(۳) نمی‌توان محاسبه کرد.

۱۰۵- مجموعه نشان داده شده با سرعت ثابت V در حال حرکت می‌باشد. نیروی وارد بر چرخ در لحظه ورود به مسیر دایروی در نقطه A با چه شرطی وجود خواهد داشت:



$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{2}{3} \frac{v^2}{g} &< 1 \\ (2) \quad \frac{4}{3} \frac{v^2}{rg} &< 1 \\ (3) \quad \frac{4}{3} \frac{v^2}{rg} &> 1 \\ (4) \quad \frac{4}{3} \frac{rg}{v^2} &< 1 \end{aligned}$$

۱۰۶- ماتریس سفتی برای سیستم زیر برابر است با: (مختصات مشخص شده در شکل را در نظر بگیرید)



$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & a(K_1 - K_2) & -K_1 & -K_2 \\ a(K_1 - K_2) & a(K_1 + K_2) & -K_1 a & -K_2 a \\ -K_1 & -K_1 a & K_1 + K_3 & 0 \\ -K_2 & -K_2 a & 0 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \\ (2) \quad \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & a(K_1 - K_2) & -K_1 & -K_2 \\ a(K_1 - K_2) & a^2(K_1 + K_2) & -K_1 a & -K_2 a \\ -K_1 & -K_1 a & K_1 + K_3 & 0 \\ -K_2 & -K_2 a & 0 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \\ (3) \quad \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & a(K_1 - K_2) & -K_1 & -K_2 \\ a(K_1 - K_2) & a^2(K_1 + K_2) & -K_1 a & K_2 a \\ -K_1 & -K_1 a & K_1 + K_3 & 0 \\ -K_2 & K_2 a & 0 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \\ (4) \quad \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & a(K_1 - K_2) & -K_1 & -K_2 \\ a(K_1 - K_2) & a(K_1 + K_2) & -K_1 a & K_2 a \\ -K_1 & -K_1 a & K_1 + K_3 & 0 \\ -K_2 & K_2 a & 0 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۰۷- معادله دیفرانسیل حرکت یک سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر داده شده است. بزرگترین فرکانس طبیعی سیستم برابر است با:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 - 2x_2 = 12 \sin 2t \\ \ddot{x}_2 + 4x_2 - 2x_1 = 3 \sin t \end{cases}$$

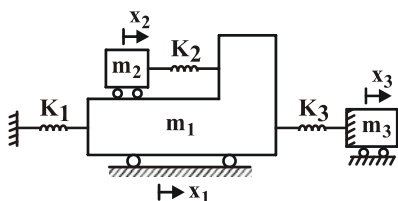
(۴) برابر ۵/۵

(۳) کوچکتر از ۵

(۲) بزرگتر از ۵

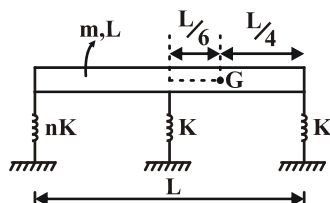
(۱) بزرگتر از ۶

۱۰۸- معادله حرکت سیستم زیر کدام یک از این گزینه‌ها می‌باشد؟



$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \\ (2) \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \\ (3) \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & K_2 & -K_3 \\ K_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \\ (4) \quad \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & m_1 + m_2 & 0 \\ m_1 + m_2 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

۱۰۹- در سیستم شکل زیر که مختصات به صورت انتقال مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم در نظر گرفته شده است مقدار n چقدر باشد تا سیستم دی کوپل شود؟

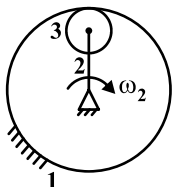


- (۱) ۹ (۲) $\frac{1}{3}$
(۳) ۳ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۱۰- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست می‌باشد؟

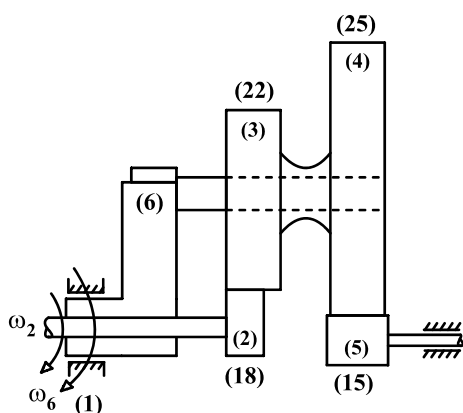
- (۱) هنگامی که سیستم در یکی از مدهای طبیعی خود نوسان می‌کند، تمام نقاط سیستم بطور همزمان از وضعیت تعادل استاتیکی عبور می‌کنند.
(۲) در معادله لاگرانژ به فرم $(\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i}) = Q_i$ ، نیروی وارد بر درجه آزادی i از طرف محرک خارجی می‌باشد.
(۳) در ارتعاشات سیستم‌های چند درجه آزادی همواره تفاضل تمام مدهای طبیعی می‌باشد.
(۴) در سیستم‌های نامیرا همیشه می‌توان معادلات حرکت را از هم جدا کرد.

۱۱۱- در شکل زیر اگر سرعت زاویه‌ای لینک ۲، ω_2 باشد، در جهت نشان داده شده، سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ۳ کدام است؟



- (۱) $(1 - \frac{N_1}{N_3})\omega_2$ (۲) $(1 + \frac{N_1}{N_3})\omega_2$
(۳) $(1 - \frac{N_2}{N_3})\omega_2$ (۴) $(1 + \frac{N_2}{N_3})\omega_2$

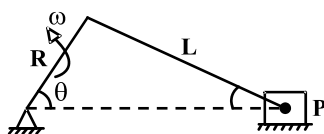
۱۱۲- با توجه به شکل روبرو، اگر چرخ‌دنده‌های ۲ و ۶ هر دو جهت ساعتگرد و به ترتیب با سرعت زاویه‌ای $5 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و $75 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ حرکت کنند،



سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ۵ چقدر است؟

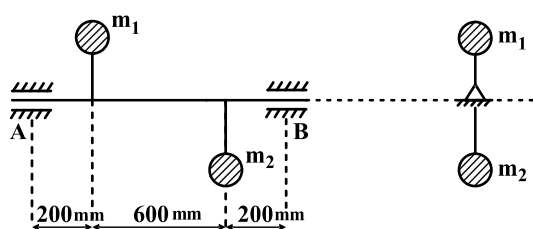
- (۱) ۱۱۰ در عکس جهت عقربه‌های ساعت
(۲) ۱۱۰ در جهت عقربه‌های ساعت
(۳) $41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در عکس جهت عقربه‌های ساعت
(۴) $41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در جهت عقربه‌های ساعت

۱۱۳- در مکانیزم لنگ و لغزنده روبرو، سرعت خطی نقطه P کدام است؟



- (۱) $-R\omega(\sin \theta + \frac{R}{2L} \sin \theta)$ (۲) $R\omega(\sin \theta - \frac{R}{L} \sin 2\theta)$
(۳) $-R\omega(\sin \theta + \frac{R}{2L} \sin 2\theta)$ (۴) $R\omega(\sin 2\theta + \frac{R}{L} \sin 2\theta)$

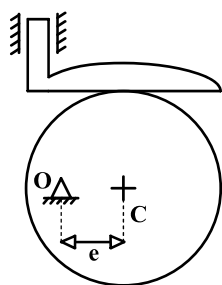
۱۱۴- با توجه به شکل روبرو، چنانچه سرعت زاویه‌ای محور AB $10 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ باشد، نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه B چقدر است؟



- $m_1 = 2$ $R_1 = 50 \text{ mm}$
 $m_2 = 3$ $R_2 = 100 \text{ mm}$

- (۱) ۲۶ N
(۲) ۲ N
(۳) ۱۴ N
(۴) ۲۲ N

۱۱۵ - با توجه به بادامک و پیرو مطابق شکل روبرو، در مورد پیوستگی نمودار سرعت، شتاب و تکان نسبت به زاویه کدام گزینه صحیح است؟



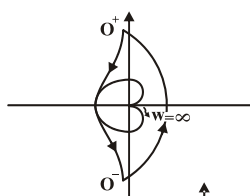
(۱) نمودار سرعت فقط پیوسته است.

(۲) فقط نمودار شتاب و سرعت پیوسته هستند.

(۳) فقط نمودار شتاب پیوسته است.

(۴) نمودارهای سرعت، شتاب و تکان پیوسته هستند.

۱۱۶ - دیاگرام قطبی حلقه باز سیستم مینیمم فازی به صورت زیر رسم شده است. کدام گزینه تابع تبدیل حلقه باز و مسیر نایکوئیست مربوطه را نشان می‌دهد؟



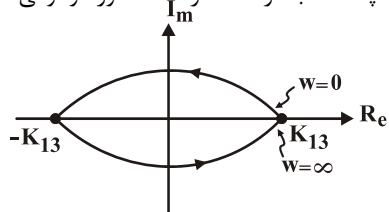
(۲) $\frac{K}{S(S+\alpha)(S+\gamma)(S+\beta)}$ و

(۴) $\frac{K}{S(S+\alpha)(S+\beta)(S+\gamma)}$ و

(۱) $\frac{K(S+\alpha)}{S^3(S+\gamma)(S+\beta)}$ و

(۳) $\frac{K(S+\alpha)}{S^3(S+\beta)(S+\gamma)}$ و

۱۱۷ - شکل زیر دیاگرام نایکوئیست یک سیستم کنترلی را نشان می‌دهد. سیستم حلقه باز دارای چند قطب در سمت راست محور موهومی است و چه موقع سیستم حلقه بسته پایدار است؟



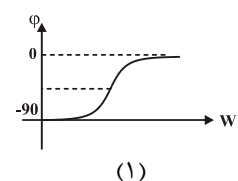
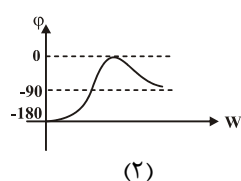
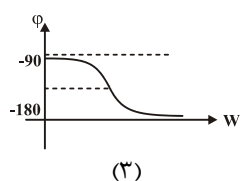
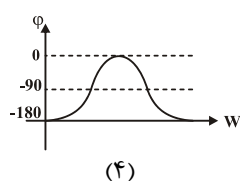
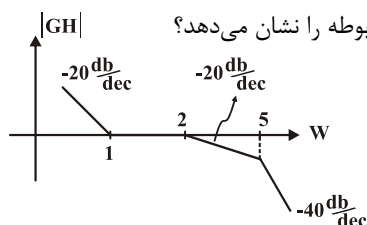
(۱) سیستم حلقه باز دارای یک قطب است، سیستم به ازای $K > 3$ پایدار است

(۲) سیستم حلقه باز دارای دو قطب است، سیستم به ازای $K > 3$ پایدار است

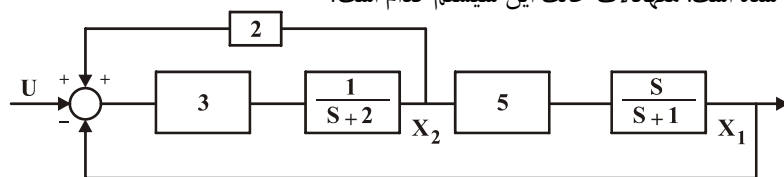
(۳) سیستم حلقه باز دارای یک قطب است، سیستم به ازای $0 < K < 3$ پایدار است

(۴) سیستم حلقه باز دارای دو قطب است، سیستم به ازای $0 < K < 3$ پایدار است

۱۱۸ - شکل زیر دیاگرام اندازه لگاریتمی (db) یک تابع انتقال را نشان می‌دهد. کدام شکل دیاگرام فاز مربوطه را نشان می‌دهد؟



۱۱۹- دیاگرام بلوکی سیستمی در شکل زیر نشان داده شده است. معادلات حالت این سیستم کدام است؟



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -16 & -40 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (2)$$

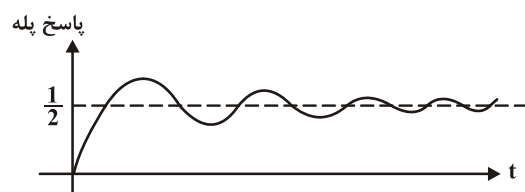
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -16 & 20 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (4)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -16 & 20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -16 & -40 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

۱۲۰- پاسخ پله یک سیستم حلقه بسته به صورت شکل زیر است. برای تبدیل سیستم حلقه بسته به یک سیستم فوق میرا با خطای حالت دائمی

صفر مناسبترین کنترل کننده کدام است؟



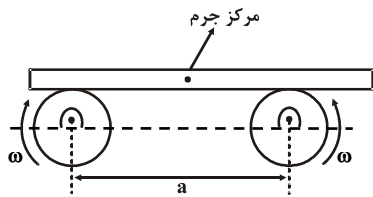
P (۱)

PI (۲)

PD (۳)

PID (۴)

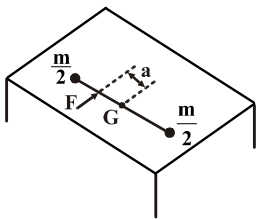
۱۲۱- میله گرد یکنواختی بر روی دو پولی که با سرعت زاویه‌ای ω در خلاف جهت یکدیگر می‌چرخند قرار دارد. این حرکت به صورت رفت و برگشتی می‌باشد. فرکانس طبیعی حرکت، کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (μ_k ضریب اصطکاک است).



$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mu_k a}{2g}} \quad (2) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2\mu_k g}{a}} \quad (1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2\mu_k a}} \quad (4) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2a}{\mu_k g}} \quad (3)$$

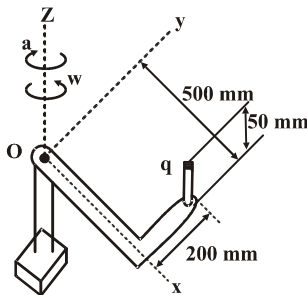
۱۲۲- دو گوی به جرم $\frac{m}{2}$ توسط میله‌ای به طول L به یکدیگر متصل شده‌اند. نیروی افقی F ناگهان به میله وارد می‌شود مقدار تغییر سرعت زاویه‌ای سیستم حول مرکز جرم نسبت به زمان، کدام است؟



$$\ddot{\theta} = \frac{mL^2 a}{2F} \quad (2) \quad \ddot{\theta} = \frac{Fa^2}{mL^2} \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mL^2 F}{2a} \quad (4) \quad \ddot{\theta} = \frac{4Fa}{mL^2} \quad (3)$$

۱۲۳- شتاب نقطه q ، واقع در بازوی متحرک نشان داده شده در زمانی که $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و $\alpha = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ است، برابر با کدام گزینه می‌باشد؟



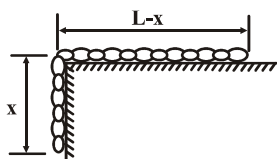
$$1/2 \mathbf{i} + 1/4 \mathbf{j} \quad (1)$$

$$1/6 \mathbf{i} + 2/3 \mathbf{j} \quad (2)$$

$$-1/8 \mathbf{i} - 3/2 \mathbf{j} \quad (3)$$

$$-1/4 \mathbf{i} - 2/3 \mathbf{j} \quad (4)$$

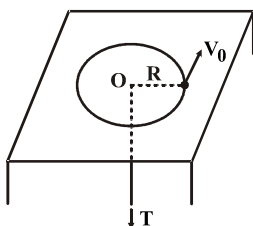
۱۲۴- طول زنجیری L می‌باشد و مقدار x از طول آن آویزان است تا باعث شروع حرکت گردد، انرژی جنبشی زنجیر وقتی که آخرین حلقه زنجیر به لبه می‌رسد، برابر با کدام گزینه می‌باشد؟ (جرم واحد طول برابر p می‌باشد).



$$T = \frac{3}{2} \rho g L^2 \quad (2) \quad T = \frac{1}{2} \rho g L^2 \quad (1)$$

$$T = \frac{5}{2} \rho g L^2 \quad (3) \quad T = \frac{7}{2} \rho g L^2 \quad (4)$$

۱۲۵- گلوله‌ای در یک صفحه افقی به صورت دایره‌ای دوران می‌کند. گلوله توسط نخ که در شکل نشان داده شده است، کشیده می‌شود. اگر شعاع دوران گلوله به $\frac{1}{3}$ مقدارش برسد کار انجام شده کدام است؟ (نخ بسیار آهسته کشیده می‌شود)



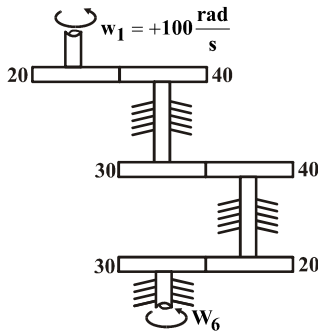
$$2m^2 v_0^2 \quad (1)$$

$$3mR^2 v_0^2 \quad (2)$$

$$4mv_0^2 \quad (3)$$

$$\Delta m \left(\frac{v_0}{R} \right)^2 \quad (4)$$

۱۲۶- در مجموعه چرخ دنده مقابل اگر سرعت ورودی $\omega_1 = +100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ باشد، سرعت خروجی ω_6 کدام است؟



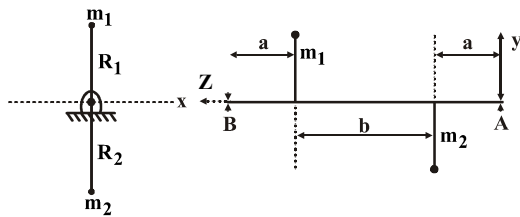
$$\omega_6 = -400 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (۱)$$

$$\omega_6 = +400 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (۲)$$

$$\omega_6 = -25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (۳)$$

$$\omega_6 = +25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (۴)$$

۱۲۷- نیروی عکس العمل یا تاقان A در سرعت دورانی $\omega = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ چقدر است؟



$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 0.6 \text{ m} \\ m_1 = 1 \text{ kg}, m_2 = 3 \text{ kg} \\ a = 0.3 \text{ m}, b = 0.6 \text{ m} \end{cases}$$

$$F_A = 1200 \text{ N} \quad (۱)$$

$$F_A = 2400 \text{ N} \quad (۲)$$

$$F_A = 3600 \text{ N} \quad (۳)$$

$$F_A = 4800 \text{ N} \quad (۴)$$

۱۲۸- در یک موتور رفت و برگشتی تک سیلندر نسبت طول لنگ به شاتون k و نیروی لرزشی اولیه F_1 و نیروی لرزشی ثانویه F_2 می باشد. با

فرض $\alpha = \frac{F_2}{4kF_1}$ کدام یک از روابط زیر درست است؟

$$\cos \theta = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2} \quad (۴) \quad \cos \theta = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 0.5} \quad (۳) \quad \sin \theta = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 0.5} \quad (۲) \quad \sin \theta = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2} \quad (۱)$$

۱۲۹- طرز قرارگیری لنگ های یک موتور ۶ سیلندر خطی عمودی مانند شکل زیر می باشد. با فرض اینکه فواصل سیلندرها یکسان و کلیه

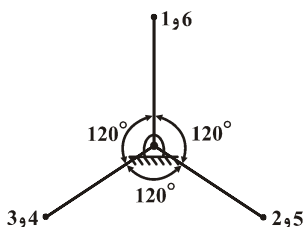
سیلندرها و شاتون ها و پیستون ها یکسان باشند، کدام گزینه زیر صحیح است؟

(۱) نیروهای اولیه و ثانویه و گشتاورهای اولیه و ثانویه بالانس هستند.

(۲) فقط گشتاورهای اولیه و ثانویه بالانس هستند.

(۳) فقط نیروهای اولیه و ثانویه بالانس هستند.

(۴) نیروهای اولیه و ثانویه و گشتاورهای اولیه و ثانویه نابالانس اند.



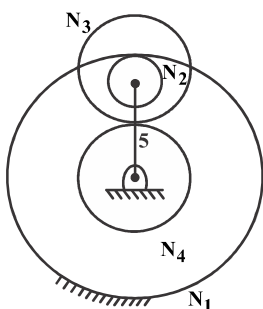
۱۳۰- نسبت $\frac{\omega_4}{\omega_5}$ کدام است؟ ($N_4 = N_2 = 20$, $N_3 = 40$)

$$۹ \quad (۱)$$

$$۸ \quad (۲)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۴)$$



۱۳۱- در یک سیستم دو درجه آزادی با شکل مودهای ۱ و $\frac{X_1}{X_2} \bigg|_{\omega_1} = -1$ و $\frac{X_1}{X_2} \bigg|_{\omega_2} = 1$ و فرکانس های طبیعی $\omega_1 = 9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و $\omega_2 = 9.628 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

ضربان (تپش) رخ می دهد. پریود ضربان چقدر است؟

$$\tau_b = 5 \text{ sec} \quad (۴)$$

$$\tau_b = 10 \text{ sec} \quad (۳)$$

$$\tau_b = 40 \text{ sec} \quad (۲)$$

$$\tau_b = 20 \text{ sec} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \gamma kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + \gamma kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -0.25 \end{bmatrix} \quad (4) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_r)x_1 - r k_r x_r = F_0 \cos \omega t \\ m\ddot{x}_r + C\dot{x}_r + r k_r x_r - r k_r x_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_r)x_1 - k_r x_r = F_0 \cos \omega t \\ m\ddot{x}_r + C\dot{x}_r + r k_r x_r - r k_r x_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_r + (k_1 + k_r)x_1 - r k_r x_r = F_0 \cos \omega t \\ m\ddot{x}_r + C\dot{x}_r + r k_r x_r - k_r x_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_r)x_1 - rk_r x_r = F_0 \cos \omega t \\ m\ddot{x}_r + C\dot{x}_r + k_r x_r - k_r x_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

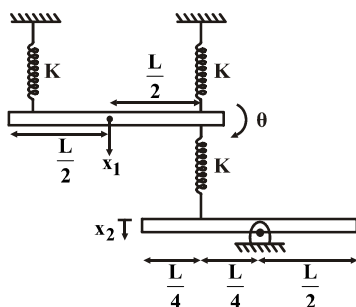
$$2/44 \sqrt{\frac{T}{\text{mL}}}, 2 \sqrt{\frac{T}{\text{mL}}} \quad (1)$$

$$\frac{2}{23} \sqrt{\frac{T}{mL}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{mL}} \quad (2)$$

$$1/\gamma_3 \sqrt{\frac{T}{mL}}, \sqrt{\frac{T}{mL}} \quad (3)$$

$$1/\epsilon \sqrt{\frac{T}{m_L}}, \sqrt{\frac{T}{m_L}} \quad (\epsilon)$$

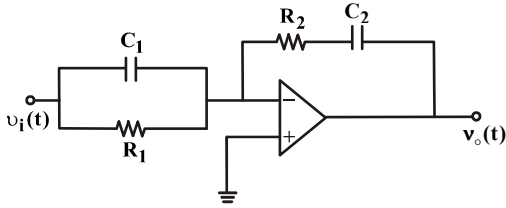
۱۳۵- برای مجموعه زیر ماتریس سختی کدام است؟ $\theta = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \\ x_2 \end{Bmatrix}$ (مرجع مختصاتی)



$$\begin{bmatrix} \text{rk} & \text{kL} & -\text{k} \\ & \text{r} & \text{r} \\ \text{kL} & \frac{\text{rkLr}}{\text{r}} & -\text{kL} \\ \text{r} & \text{r} & \text{r} \\ -\text{k} & -\text{kL} & \text{k} \\ \text{r} & \text{r} & \text{r} \end{bmatrix} \quad (\text{r}) \quad \begin{bmatrix} \text{rk} & \text{kL} & -\text{k} \\ \text{kL} & \text{rkLr} & \text{kL} \\ -\text{k} & -\text{kL} & \text{rkL} \end{bmatrix} \quad (\text{r})$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{k} & \text{kL} & -\text{k} \\ \mathfrak{r} & \mathfrak{r} & \mathfrak{r} \\ \frac{\text{kL}}{\mathfrak{r}} & \frac{\mathfrak{r}\text{kL}}{\mathfrak{r}} & -\text{kL} \\ -\text{k} & \text{kL} & \frac{\text{kL}}{\mathfrak{r}} \end{bmatrix} \quad (\mathfrak{r}) \quad \begin{bmatrix} \text{k} & \text{kL} & -\text{k} \\ \mathfrak{r} & \mathfrak{r} & \mathfrak{r} \\ \mathfrak{r}\text{kL} & \mathfrak{r}\text{kL} & \text{kL} \\ -\mathfrak{r}\text{k} & \text{kL} & \text{kL} \end{bmatrix} \quad (\mathfrak{r})$$

۱۳۶- مدار آپ امپی شکل زیر چه نوع جبرانسازی (کنترلر) می باشد؟



PD (۱)

PI (۲)

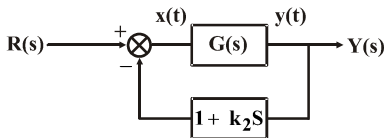
PID (۳)

(۴) با این اطلاعات نمی توان مشخص کرد.

۱۳۷- در شکل زیر معادله دینامیک سیستم مدار باز $G(s)$ به صورت زیر می باشد:

$$y''(t) + y'(t) = k_1 x(t)$$

ضرائب k_1 و k_2 چه مقدار باشند تا قطب های سیستم حلقه بسته $S = -2 \pm j\sqrt{3}$ قرار گیرند؟



$$k_2 = \frac{7}{3}, k_1 = 3 \quad (۲) \quad k_2 = 7, k_1 = \frac{3}{7} \quad (۱)$$

$$k_2 = \frac{3}{7}, k_1 = 7 \quad (۴) \quad k_2 = 3, k_1 = \frac{7}{3} \quad (۳)$$

۱۳۸- تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم با فیدبک واحد منفی عبارت است از $G_p(s) = \frac{1}{S+3}$. اگر بخواهیم یک کنترل کننده PI با تابع

$$\left(\frac{\text{Ln } 0.1378}{\sqrt{\pi^2 + (\text{Ln } 0.1378)^2}} = 0.8 \right)$$

الف- به ازای ورودی پله، خطای ماندگار صفر شود.

ب- به ازای ورودی شیب واحد، خطا برابر ۱۲/۰ شود.

ج- حداکثر جهش پاسخ پله برابر ۱۳/۷۸ درصد شود.

آن گاه تابع تبدیل کنترلر، معادل کدام یک از گزینه های زیر می شود؟

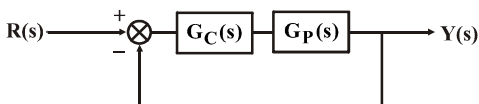
$$\frac{5S+8}{S} \quad (۴)$$

$$\frac{8S+15}{S} \quad (۳)$$

$$\frac{8S+25}{S} \quad (۲)$$

$$\frac{5S+25}{S} \quad (۱)$$

۱۳۹- کنترل کننده $G_c(s) = \frac{S+a}{S+b}$ برای پایدار کردن $G_p = \frac{k}{S(S-2)}$ به کار گرفته می شود. مقادیر مناسب a و b و k کدام است؟



$$k=24 \quad b=1 \quad a=1 \quad (۱)$$

$$k=20 \quad b=4 \quad a=1 \quad (۲)$$

$$k=26 \quad b=2 \quad a=2 \quad (۳)$$

$$k=10 \quad b=4 \quad a=1 \quad (۴)$$

۱۴۰- کدام یک از عبارات زیر نادرست است؟

(۱) سیستم مدار بسته نسبت به سیستم مدار باز دقت بالاتری دارد و نسبت به ورودی مزاحم (نویز) مقاوم تر است.

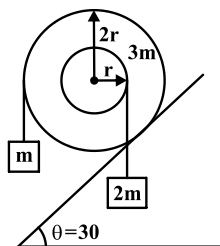
(۲) کنترلر تناسبی - مشتق گیر پایداری سیستم را افزایش می دهد اما خطای حالت ماندگار را به خوبی تصحیح نمی کند.

(۳) جبران کننده Lag (پس فاز) بهره سیستم را افزایش می دهد و خطاهای ماندگار را کاهش می یابد.

(۴) تابع تبدیل یک جبران کننده Lead (پیش فاز) عبارت است از $\frac{S+\frac{1}{T}}{S+\frac{1}{\alpha T}}$ که اگر $\alpha \rightarrow \infty$ میل کند این جبران کننده به کنترلر تناسبی -

انتگرال گیر (PI) تبدیل می شود.

۱۴۱- همانند شکل زیر دیسکی به جرم $3m$ بر روی سطحی شیب‌دار بدون لغزش می‌غلتد. شتاب زاویه‌ای دیسک کدام است؟



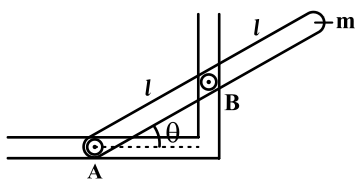
(دیسک را به صورت یکپارچه به شعاع $2r$ در نظر بگیرد. $\bar{I}_{\text{دیسک}} = \frac{1}{2}mr^2$)

$$(1) \quad \frac{12g}{5r} \quad (2) \quad \frac{g}{3r}$$

$$(3) \quad \frac{3g}{r} \quad (4) \quad \frac{5g}{12r}$$

۱۴۲- میله‌ای به جرم m در موقعیت نشان داده شده در شکل از حالت سکون رها می‌شود. سرعت زاویه‌ای میله در لحظه برخورد با زمین کدام است؟

$$(\bar{I}_{\text{میله}} = \frac{1}{12}ml^2)$$

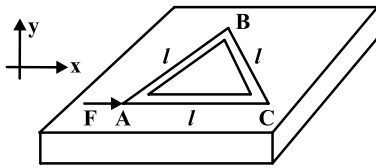


$$(1) \quad \omega = \sqrt{\frac{24g \cos \theta}{l(1 + 12 \sin^2 \theta)}} \quad (2) \quad \omega = \sqrt{\frac{24g \sin \theta}{l(1 + 12 \cos^2 \theta)}}$$

$$(3) \quad \omega = \sqrt{\frac{6g \cos \theta}{l(1 + 3 \sin^2 \theta)}} \quad (4) \quad \omega = \sqrt{\frac{6g \sin \theta}{l(1 + 3 \cos^2 \theta)}}$$

۱۴۳- قاب مثلثی شکل یکنواختی به جرم m همانند شکل زیر در اثر اعمال نیروی F به نقطه A بر روی صفحه افقی بدون اصطکاک شروع به حرکت می‌کند. شتاب نقطه B در لحظه شروع حرکت کدام است؟

(فرض می‌شود که هر یک از اضلاع به صورت میله‌ای یکنواخت به طول l می‌باشد) $(\bar{I}_{\text{میله}} = \frac{1}{12} ml^2)$



$$\frac{F}{2m} \vec{i} \quad (1)$$

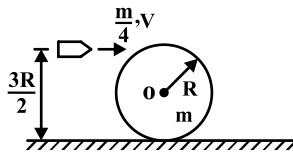
$$\frac{2F}{3m} \vec{i} \quad (2)$$

$$0 \quad (4)$$

$$\frac{F}{4m} \vec{i} \quad (3)$$

۱۴۴- دیسکی به جرم m و شعاع R همانند شکل زیر بر روی زمین در حال سکون است. گلوله‌ای به جرم $\frac{m}{4}$ و سرعت v همانند شکل زیر به دیسک برخورد می‌کند. سرعت زاویه‌ای دیسک پس از برخورد گلوله کدام است؟ حرکت دیسک پس از برخورد گلوله به آن را غلتش ناب در نظر

بگیرید $(\bar{I}_{\text{دیسک}} = \frac{1}{2} mr^2)$



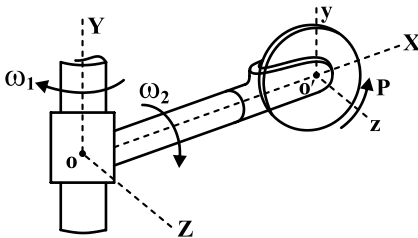
$$\frac{11}{2} \frac{v}{R} \quad (2)$$

$$\frac{6}{17} \frac{v}{R} \quad (1)$$

$$\frac{17}{6} \frac{v}{R} \quad (4)$$

$$\frac{2}{11} \frac{v}{R} \quad (3)$$

۱۴۵- دیسک مدور نازک به جرم m و شعاع r حول محور Z خود با سرعت زاویه‌ای ثابت p دوران می‌کند و محور نگهدارنده دیسک نیز حول محور X گذرنده از OO' با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_2 می‌چرخد. همزمان با این حرکات، کل مجموعه نیز با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_1 حول محور Y گذرنده از نقطه O دوران می‌کند. شتاب زاویه‌ای α دیسک کدام است؟



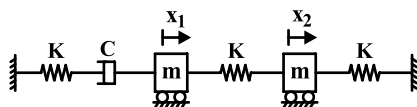
$$p\omega_1 \vec{i} - p\omega_2 \vec{j} + \omega_1\omega_2 \vec{k} \quad (1)$$

$$-p\omega_1 \vec{i} + p\omega_2 \vec{j} + \omega_1\omega_2 \vec{k} \quad (2)$$

$$-p\omega_1 \vec{i} - p\omega_2 \vec{j} + \omega_1\omega_2 \vec{k} \quad (3)$$

$$p\omega_1 \vec{i} + p\omega_2 \vec{j} - \omega_1\omega_2 \vec{k} \quad (4)$$

۱۴۶- ماتریس‌های جرم، دمپینگ و سختی سیستم ارتعاشی زیر کدام است؟



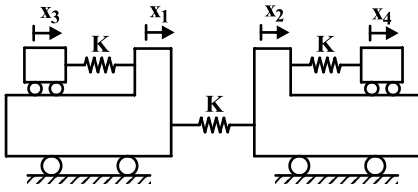
$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۴۷- ماتریس سختی سیستم شکل زیر برابر است با:



$$\begin{bmatrix} 2K & -K & -K & 0 \\ -K & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & 2K & -K \\ 0 & -K & 0 & K \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K & -K & 0 \\ -K & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & K & -K \\ 0 & -K & 0 & K \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K & 0 & -K \\ -K & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & -K \\ -K & -K & 0 & K \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K & -K & 0 \\ -K & 2K & 0 & 0 \\ -K & 0 & K & -K \\ 0 & -K & 0 & K \end{bmatrix} \quad (۳)$$

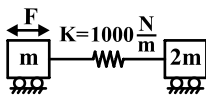
۱۴۸- سیستم ارتعاشی دو درجه آزادی شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر نیروی هارمونیک $F = 10 \sin 4t$ به جرم $m = 60 \text{ kg}$ اعمال گردد. دامنه حرکت دو جسم در چه حالتی نسبت به هم قرار دارند.

(۱) همفازند

(۲) در فاز مخالفند

(۳) صفر می‌باشند

(۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد

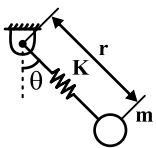


۱۴۹- در یک سیستم دو درجه آزادی ماتریس جرمی $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$ و ماتریس سختی $\begin{bmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 300 \end{bmatrix}$ می‌باشد و بردار ویژه متناظر مد اول

به صورت $\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1/00 \\ -0/5 \end{Bmatrix}$ می‌باشد. بردار ویژه متناظر با مد دوم کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (فرکانس‌های طبیعی نابرابر می‌باشد)

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1/00 \\ 1/00 \end{bmatrix} \quad (۱) \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1/00 \\ 0/625 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1/00 \\ -1/00 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1/00 \\ -1/00 \end{bmatrix} \quad (۴) \text{ هیچکدام}$$

۱۵۰- معادله ارتعاشی سیستم شکل مقابل به کدام صورت است؟ (در حالت آزاد طول فنر r_0 می‌باشد)



$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + K(r - r_0) = mg \cos \theta \\ r\ddot{\theta} + g(r - r_0) \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} m(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2) + K(r - r_0) = mg \cos \theta \\ r\ddot{\theta} + g(r - r_0) \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (۱) \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + Kr = mg \cos \theta \\ r\ddot{\theta} + gr \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + K(r - r_0) = mg \cos \theta \\ r\ddot{\theta} + gr \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۱۵۱- در بادمک‌ها با مقدار زاویه‌ی گردش برای صعود کلی β و مقدار صعودی کلی h ، اگر بادمک با سرعت زاویه‌ای ω در حال دوران باشد، مقدار نسبت شتاب ماکزیمم در حالت حرکت شتاب ثابت به حرکت سیکلوئیدی برابر است با:

$$\frac{\pi}{2} \omega \quad (۴) \quad \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad \frac{2}{\pi} \quad (۲) \quad \frac{2}{\pi} \omega \quad (۱)$$

۱۵۲- در مورد بالانس مجموعه‌ها کدام گزینه نادرست است؟

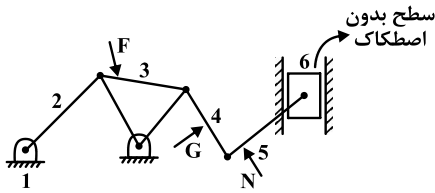
(۱) اگر مجموعه‌ای در بالانس دینامیکی باشد در بالانس استاتیکی نیز خواهد بود.

(۲) بالانس در مجموعه‌های دوار به معنی تقلیل یا حذف نیروهای موثر در یاتاقان‌ها می‌باشد.

(۳) برای بالانس نیروهای ثانویه در موتورهای چند سیلندر خطی باید مجموع سینوس و کسینوس زوایای لنگ‌ها صفر باشد.

(۴) برای بالانس دینامیکی و استاتیکی تک جرم گردان حاصلضرب جرم اضافی در فاصله شعاعی باید مساوی حاصلضرب تک جرم در فاصله شعاعی متناظرش باشد.

۱۵۳- کدام یک از گزینه‌های زیر شرط تعادل استاتیکی مجموعه را فراهم می‌آورد؟



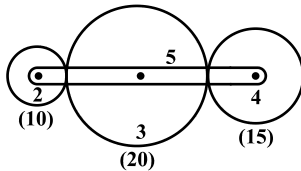
(۱) $F + N + G = 0$

(۲) $F_{16} + F_{13} + F_{12} + F_{23} + F_{45} + F + G + N = 0$

(۳) $F_{13} + F_{12} + F + G + N + F_{56} = 0$

(۴) $F_{12} + G + N + F + F_{13} = 0$

۱۵۴- در سیستم انتقال چرخنده شکل زیر سرعت زاویه چرخنده ۲ برابر $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و CCW و سرعت دوران بازوی ۵، $20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و CW می‌باشد. سرعت دوران چرخنده ۴ برابر است با:



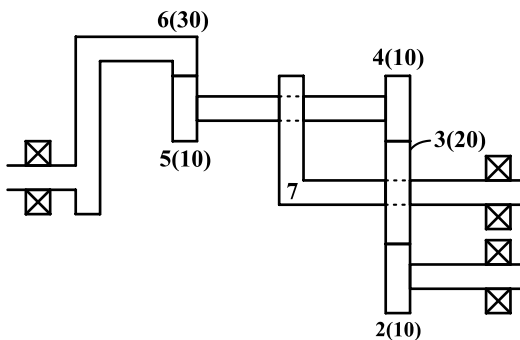
(۱) $\frac{40}{3}$ و CW

(۲) 20 و CCW

(۳) صفر

(۴) 20 و CW

۱۵۵- در مجموعه چرخنده خورشیدی شکل زیر اگر سرعت چرخنده ۲، $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و CW و چرخنده ۶، $20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و CCW از نمای چپ باشد،



سرعت بازوی ۷ چقدر است؟

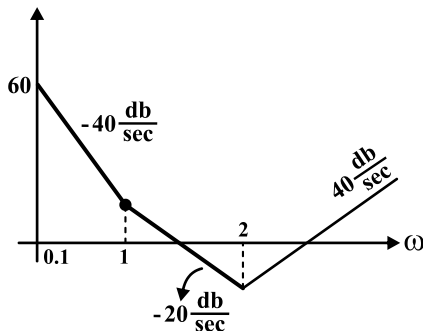
(۱) $12/5$ و CWW

(۲) 35 و CCW

(۳) 35 و CW

(۴) $12/5$ و CW

۱۵۶- نمودار مجانب‌های دامنه بود (Bode) یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. نزدیکترین تابع تبدیل حلقه باز متناظر با این



سیستم کدام است؟

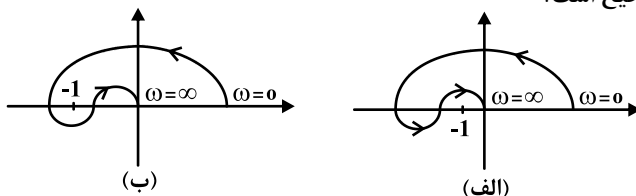
(۱) $\frac{5(S+1)(S+2)^2}{2S^2}$

(۲) $\frac{5(S+2)(S+1)^2}{2S^2}$

(۳) $\frac{5(S+1)(S+2)^3}{4S^2}$

(۴) $\frac{5(S+2)(S+1)^3}{4S^2}$

۱۵۷- در یک سیستم کنترل مدار بسته، تابع تبدیل حلقه باز، دارای ۲ قطب و ۱ صفر در سمت راست محور موهومی می‌باشد، اگر تابع تبدیل حلقه باز دارای یکی از دیاگرام‌های نایکوئیت زیر (الف یا ب) باشد، کدام گزینه صحیح است؟



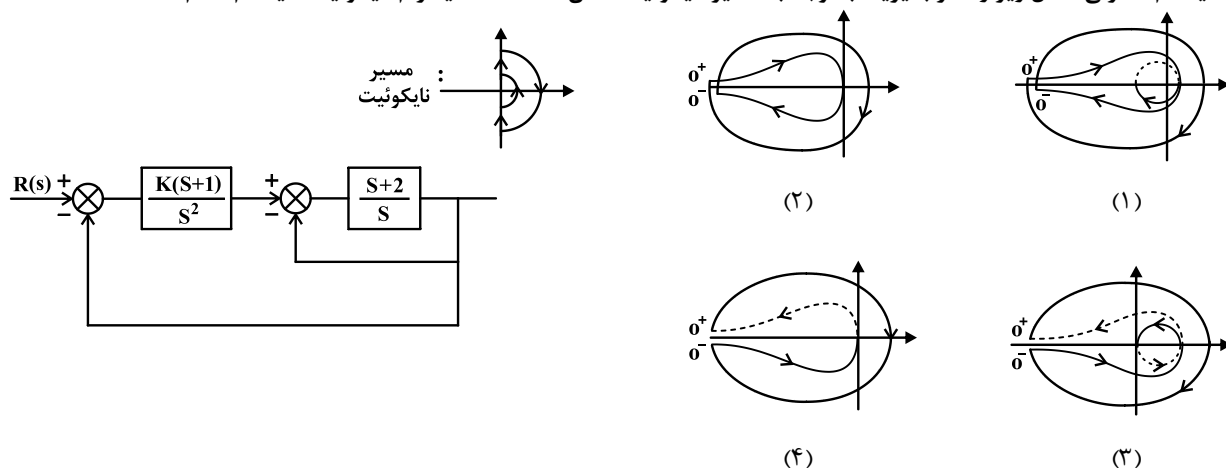
(۱) سیستم مدار بسته در حالت الف دارای دو قطب در سمت راست محور موهومی است و در حالت (ب) قطبی در سمت راست محور موهومی ندارد.

(۲) سیستم مدار بسته در حالت الف قطبی در سمت راست محور موهومی ندارد و در حالت (ب) دارای دو قطب در سمت راست محور موهومی است.

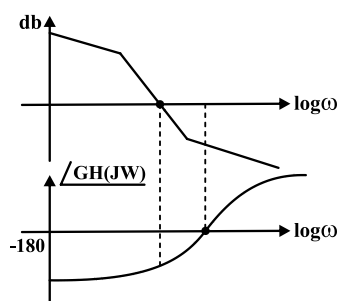
(۳) سیستم مدار بسته در حالت الف دارای دو صفر در سمت راست محور موهومی است و در حالت (ب) صفری در سمت راست محور موهومی ندارد.

(۴) سیستم مدار بسته در حالت الف صفری در سمت راست محور موهومی ندارد و در حالت (ب) دارای دو صفر در سمت راست محور موهومی است.

۱۵۸- سیستم کنترلی شکل زیر را نظر بگیرید، با توجه به مسیر نایکوئیث نشان داده شده، دیاگرام نایکوئیث سیستم کدام است؟



۱۵۹- دیاگرام بود (اندازه و فاز) یک سیستم در شکل‌های زیر نشان داده شده است. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد پایداری سیستم صحیح است؟



- (۱) سیستم ناپایدار است زیرا حد فاز منفی و حد بهره مثبت است.
- (۲) سیستم ناپایدار است زیرا حد فاز مثبت و حد بهره منفی است.
- (۳) سیستم ناپایدار است زیرا حد فاز منفی و حد بهره منفی است.
- (۴) حد بهره و حد فاز مثبت است بنابراین سیستم داده شده پیوسته است.

۱۶۰- سیستم کنترلی دارای معادلات حالت و معادلات خروجی به صورت زیر است، تابع تبدیل سیستم داده شد کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (۴)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-1}{s^2 + s + 1} \quad (۳)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (۲)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-s}{s^2 + s + 1} \quad (۱)$$

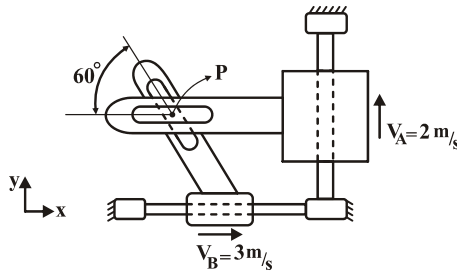
۱۶۱- متحرکی با سرعت اولیه V_0 حرکت کرده و به قطعه‌ای برخورد و در آن فرو می‌رود، اگر میزان فروروی در هر لحظه x و بیشترین مقدار آن

x_{\max} باشد، می‌توان شتاب متحرک را بصورت $a = kx^2$ فرض کرد، مقدار k را بر حسب مقادیر V_0 و x_{\max} پیدا کنید؟

$$(1) \quad \frac{3}{4} \frac{V_0^2}{x_{\max}^3} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \frac{V_0^2}{x_{\max}^3} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \frac{V_0}{x_{\max}^3} \quad (4) \quad \frac{3}{4} \frac{V_0}{x_{\max}^3}$$

۱۶۲- در شکل زیر حرکت پین توسط دو راهنمای شیار دار A و B کنترل می‌شود که پین P در میان آنها می‌لغزد. اگر لغزنده B دارای سرعت

$$V_B = 3 \frac{m}{s} \text{ به سمت راست و لغزنده } A \text{ دارای سرعت } V_A = 2 \frac{m}{s} \text{ به سوی بالا باشد، مقدار } V_P \text{ (سرعت پین) را بیابید.}$$



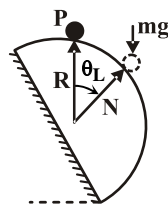
$$(1) \quad 1/84$$

$$(2) \quad 2$$

$$(3) \quad 2/7$$

$$(4) \quad 3/6$$

۱۶۳- ذره به جرم m مطابق شکل از روی سطح کروی به سمت پایین به حرکت درمی‌آید، زاویه جدایش ذره P از سطح کروی چیست؟



$$(1) \quad \theta_L = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

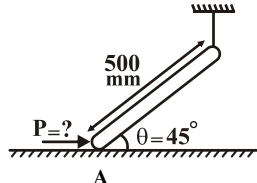
$$(2) \quad \theta_L = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$(3) \quad \theta_L = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$(4) \quad \theta_L = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

۱۶۴- میله همگنی به جرم 4 kg مطابق شکل توسط نخ‌ی در زاویه 45° نگه داشته شده است، اگر این نخ پاره شود و چنانچه بخواهیم این میله

فقط حرکت انتقالی داشته باشد، بعد از بریدن نخ چه نیرویی در نقطه A باید وارد شود؟

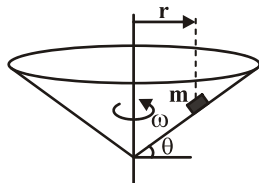


$$(1) \quad 40 \text{ N} \quad (2) \quad 50 \text{ N}$$

$$(3) \quad 30 \text{ N} \quad (4) \quad 60 \text{ N}$$

۱۶۵- ذره‌ای به جرم m مطابق شکل در داخل مخروط گردانی قرار دارد، مقدار ω چقدر باید باشد تا ذره به بیرون پرتاب نگردد. (ضریب اصطکاک

سطح μ می‌باشد)

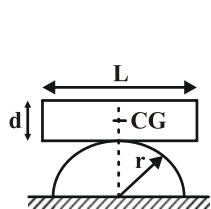


$$(1) \quad \omega > \frac{g}{r} \frac{\mu \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \quad (2) \quad \omega < \frac{g}{r} \frac{\mu \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$

$$(3) \quad \omega > \frac{g}{r} \frac{-\mu \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \quad (4) \quad \omega < \frac{g}{r} \frac{-\mu \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

۱۶۶- یک بلوک چهارضلعی به جرم m مطابق شکل بر روی قسمت فوقانی یک سطح نیم استوانه‌ای در حالت سکون قرار داده شده است. اگر بلوک

به آرامی از یک انتها کج شود، فرکانس طبیعی نوسان برابر است با:



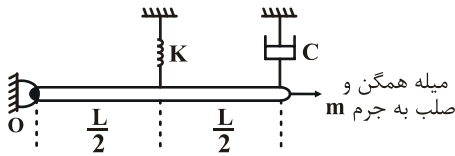
$$(1) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{12(r - \frac{d}{2})g}{4d^2 + L^2}}$$

$$(2) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{12(r + \frac{d}{2})g}{d^2 + L^2}}$$

$$(3) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{12(r + \frac{d}{2})g}{4d^2 + L^2}}$$

$$(4) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{12(r - \frac{d}{2})g}{d^2 + L^2}}$$

۱۶۷- میرایی بحرانی در سیستم نشان داده شده معادل کدام گزینه است؟



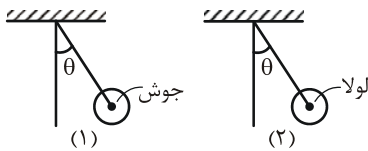
(۴) $2\sqrt{km}$

(۳) $\frac{1}{3}\sqrt{km}$

(۲) $\sqrt{\frac{km}{3}}$

(۱) \sqrt{km}

۱۶۸- کدام گزینه در مورد فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های زیر صادق است؟



(۱) فرکانس طبیعی لولا بیشتر از جوش است

(۲) فرکانس طبیعی جوش بیشتر از لولا است

(۳) هر دو، فرکانس برابری دارند

(۴) در حالت اول سیستم اصلاً نوسانی نمی‌باشد

۱۶۹- سیستم ارتعاشی یک درجه آزادی بدون میرایی که دارای فرکانس طبیعی $\omega_n = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است تحت تحریک $F = F_0 \sin 10t$ قرار می‌گیرد.

برای شرایط اولیه سکون $x(0) = 0$ و $\dot{x}(0) = 0$ ، عکس‌العمل تغییر مکان جرم $x(t)$ کدام است؟

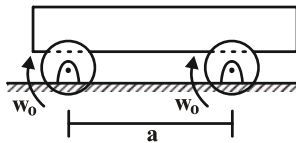
(۴) $x(t) = \frac{F_0}{k} (\sin 10t + \cos 5t)$

(۱) $x(t) = \frac{F_0}{3k} \sin 10t$

(۴) $x(t) = \frac{-F_0}{3k} \sin 10t + \frac{2F_0}{3k} \sin 5t$

(۳) $x(t) = \frac{F_0}{k} \sin 10t + \frac{F_0}{2k} \sin 5t$

۱۷۰- دو قرقره ثابت با سرعت زاویه‌ای یکسان ω_0 در خلاف جهت یکدیگر می‌چرخند، میله گردی مطابق شکل خارج از مرکز قرقره‌ها قرار گرفته است، اگر ضریب اصطکاک بین میله و قرقره μ_k باشد، مطلوب است بسامد طبیعی حرکت میله:



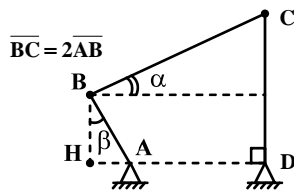
(۴) حرکت نوسانی نیست

(۳) $\sqrt{\frac{\mu_k g}{2a}}$

(۲) $\sqrt{\frac{\mu_k g}{a}}$

(۱) $\sqrt{\frac{2\mu_k g}{a}}$

۱۷۱- در مکانیزم روبرو، چنانچه سرعت زاویه‌ای عضو AB، برابر ω باشد، سرعت زاویه‌ای عضو BC کدام است؟



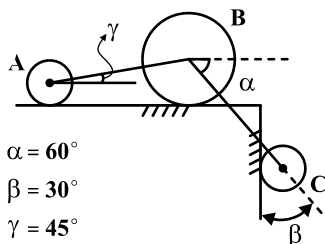
(۱) $2\omega \tan \alpha$

(۲) $2\omega \tan \beta$

(۳) $\frac{1}{2}\omega \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

(۴) $\frac{1}{2}\omega \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$

۱۷۲- در شکل زیر چنانچه سرعت مرکز دایره A، $2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ باشد، سرعت مرکز دایره C چقدر است؟



$\alpha = 60^\circ$

$\beta = 30^\circ$

$\gamma = 45^\circ$

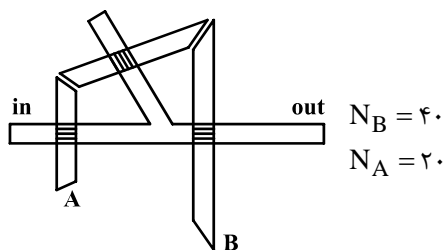
(۱) $2\sqrt{3} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

(۲) $2\sqrt{3} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

(۳) $\frac{\sqrt{6}}{3} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

(۴) $\frac{2}{3}\sqrt{6} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

۱۷۳- در سیستم دنده‌ای نشان داده شده، دنده A با سرعت زاویه ω_s و دنده B با سرعت زاویه‌ای $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ هر دو در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخند، دور محور چقدر است؟



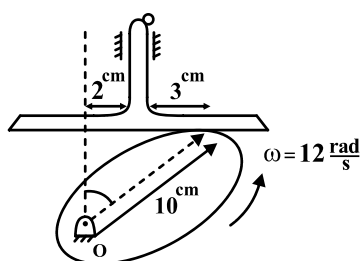
(۱) $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

(۲) $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در جهت عقربه‌های ساعت

(۳) $3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

(۴) $3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در جهت عقربه‌های ساعت

۱۷۴- با توجه به شکل، سرعت صعود پیرو در لحظه نشان داده شده چند است؟



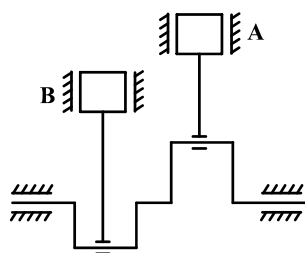
(۱) $60\sqrt{3} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

(۲) $60 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

(۳) $120 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

(۴) $36 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

۱۷۵- در مورد موتور دو سیلندر زیر کدام عبارت درست است؟

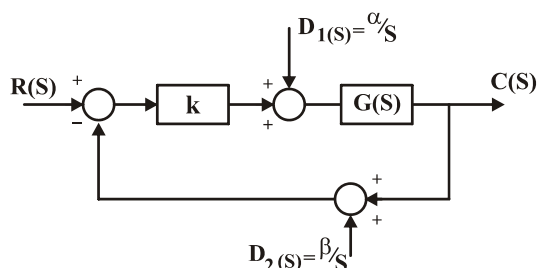
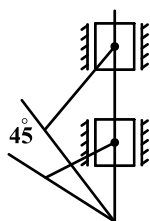


(۱) نیروهای اولیه بالانس هستند.

(۲) نیروهای ثانویه بالانس هستند.

(۳) هم نیروهای اولیه و هم نیروهای ثانویه بالانس هستند.

(۴) هیچ کدام از نیروهای اولیه یا ثانویه بالانس نیستند.



۱۷۶- در سیستم کنترلی شکل زیر کدام گزینه صحیح است؟

(۱) جمع خطای ناشی از دو اغتشاش D_1 و D_2 به ازاء $\alpha = -\beta$ ، صفر است.

(۲) جمع خطای ناشی از دو اغتشاش D_1 و D_2 به ازاء $\alpha = k\beta$ ، صفر است.

(۳) جمع خطای ناشی از دو اغتشاش D_1 و D_2 به ازاء $\alpha = -k\beta$ ، صفر است.

(۴) جمع خطای ناشی از دو اغتشاش D_1 و D_2 به ازاء $\alpha = \beta$ ، صفر است.

۱۷۷- تابع تبدیل سیستمی به صورت $G(s) = \frac{s+5}{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 2s + 24}$ است، در مورد ریشه‌های مخرج آن کدام گزینه صحیح است؟

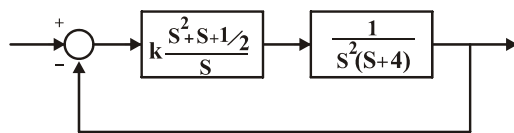
(۱) همه ریشه‌ها در سمت چپ صفحه مختلط می‌باشند.

(۲) سه ریشه در سمت چپ و یک ریشه در سمت راست می‌باشد.

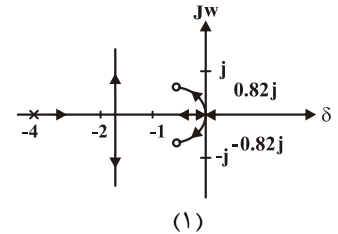
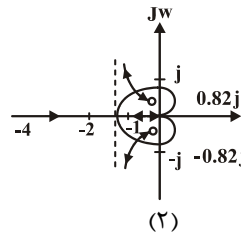
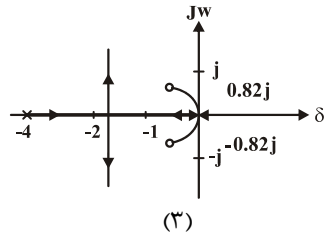
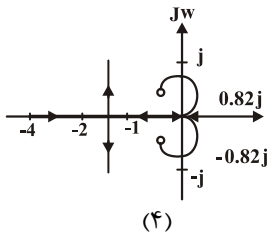
(۳) دارای دو ریشه روی محور موهومی و دو ریشه در سمت چپ صفحه مختلط است.

(۴) دو ریشه روی محور یک ریشه سمت راست و یک ریشه سمت چپ است.

۱۷۸ - سیستم کنترلی شکل زیر را در نظر بگیرید، مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم به ازاء تغییرات مثبت k کدام شکل است؟

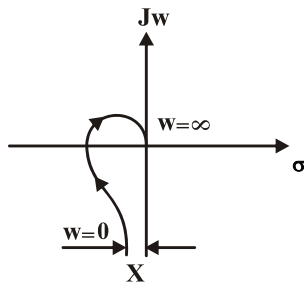


$$\left(\tan \frac{1}{\gamma} = \lambda^\circ\right)$$



۱۷۹ - نمودار قطبی سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ برای $p_1, p_2 > 0$ بصورت روبرو باشد، با توجه به

نمودار مقدار X برابر است با:



$$\frac{-\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{p_1^2 p_2^2} \quad (۲)$$

$$\frac{p_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2} \quad (۴)$$

(۱) صفر

$$\frac{-(p_1 + p_2)}{(p_1^2)(p_2^2)} \quad (۳)$$

۱۸۰ - در سیستم مکانیکی شکل زیر ورودی نیروی $f(t)$ و پاسخ تغییر مکان $y(t)$ نقطه A است. تابع تبدیل این سیستم $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$

کدام است؟

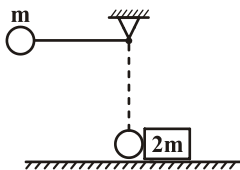
$$\frac{k_p(k_p + BS)}{k_p + k_p + BS} \quad (۴)$$

$$\frac{k_p + BS}{k_p(k_p + BS + k_p)} \quad (۳)$$

$$\frac{k_p + k_p + BS}{k_p(k_p + BS)} \quad (۲)$$

$$\frac{k_p(k_p + k_p + BS)}{k_p + BS} \quad (۱)$$

۱۸۱- پاندولی به جرم m و به طول L از حالت افقی رها می‌گردد و با جرم $2m$ که روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد برخورد می‌کند. چنانچه برخورد از نوع الاستیک باشد، سرعت جرم $2m$ بعد از برخورد برابر است با:



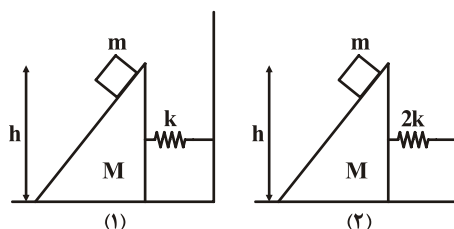
$$(1) \quad \frac{2}{3} \sqrt{2gL} \quad (2) \quad \frac{4}{3} \sqrt{2gL}$$

$$(3) \quad \frac{3}{4} \sqrt{2gL} \quad (4) \quad \frac{3}{2} \sqrt{2gL}$$

۱۸۲- خودرویی به جرم m و با سرعت v_0 حرکت می‌کند و تنها نیروی مقاومتی $F = c_1 + c_2 v^2$ بر آن وارد می‌شود، پس از طی چه مسافتی خودرو می‌ایستد؟ (C_1 و C_2 مقادیر ثابت می‌باشند)

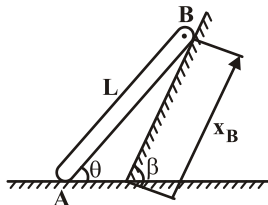
$$(1) \quad \frac{m}{4c_2} \ln\left(1 + \frac{c_1}{c_2} v_0^2\right) \quad (2) \quad \frac{m}{4c_2} \ln\left(1 + \frac{c_2}{c_1} v_0^2\right) \quad (3) \quad \frac{m}{2c_2} \ln\left(1 + \frac{c_1}{c_2} v_0^2\right) \quad (4) \quad \frac{m}{2c_2} \ln\left(1 + \frac{c_2}{c_1} v_0^2\right)$$

۱۸۳- در سیستم‌های ۱ و ۲ جسمی به جرم m از یک ارتفاع معین شروع به حرکت می‌کند تا از سطح شیب‌دار جدا شده و با سرعت ثابت v در روی سطح صاف حرکت می‌کند، کدام گزینه در مورد سرعت جسم صحیح است؟



- (۱) سرعت جسم در سیستم ۱ دو برابر سرعت جسم در سیستم ۲ است.
- (۲) در سیستم ۲ سرعت جسم روی سطح صاف بیشتر از سیستم ۱ می‌باشد.
- (۳) در سیستم ۱ سرعت جسم روی سطح صاف بیشتر از سیستم ۲ می‌باشد.
- (۴) هر دو مساویند.

۱۸۴ - دو انتهای میله ای از یک طرف بر روی سطح افقی و از طرف دیگر روی سطح شیب‌دار قرار دارد. اگر سرعت نقطه B برابر V_B و شتاب آن صفر باشد، شتاب زاویه‌ای میله را بدست آورید.



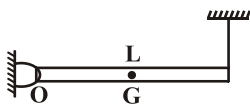
$$\alpha = \frac{V_B}{L} \sin^2 \beta \frac{\omega \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (۱)$$

$$\alpha = \left(\frac{V_B}{L}\right)^2 \sin^2 \beta \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (۲)$$

$$\alpha = \left(\frac{V_B}{L}\right)^2 \sin^2 \beta t \times \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) \quad (۳)$$

$$\alpha = \frac{V_B}{L} \sin^2 \beta t \times \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) \quad (۴)$$

۱۸۵ - در شکل زیر نیروی عکس‌العمل در نقطه O بلافاصله پس از بریدن نخ چقدر است؟



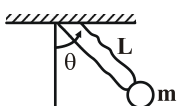
$$\frac{mg}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{mg}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{mg}{4} \quad (۳)$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

۱۸۶ - یک پاندول ساده به طول L مطابق شکل داریم اگر جرم بازو را M بگیریم فرکانس طبیعی پاندول برابر است با:



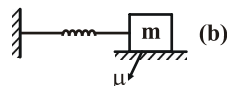
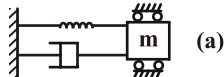
$$\omega = \sqrt{\frac{M + 2m}{2M}} \left(\frac{g}{L}\right) \quad (۲)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}}} \left(\frac{g}{L}\right) \quad (۱)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}} \left(\frac{g}{L}\right) \quad (۴)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{M + 2m}{3m}} \left(\frac{g}{L}\right) \quad (۳)$$

۱۸۷ - اگر دو سیستم (a) و (b) نشان داده شده در شکل با شرایط اولیه یکسان $x(0) = x_0$ و $\dot{x}(0) = 0$ شروع به حرکت نمایند، کدام یک در پایان حرکت انرژی بیشتری را تلف می‌نمایند.



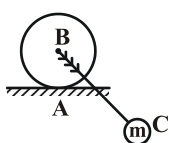
(۱) سیستم (a) انرژی کمتری را تلف می‌کند

(۲) سیستم (b) انرژی کمتری را تلف می‌کند

(۳) هر دو سیستم به یک مقدار انرژی تلف می‌کنند

(۴) با اطلاعات داده شده نمی‌توان در مورد اتلاف انرژی قضاوت کرد

۱۸۸ - در سیستم نشان داده شده در شکل زیر پاندول BC به دیسک صلب بدون جرم جوش شده است. اگر شعاع دیسک r و حرکت آن غلتش بدون لغزش باشد، فرکانس طبیعی سیستم برابر است با: (طول میله پاندول برابر L و جرم آن برابر صفر می‌باشد)



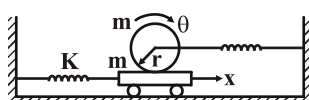
$$\sqrt{\frac{gL}{(L+r)^2}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{gL}{(L-r)^2}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{gL}{L^2 - r^2 + 2Lr}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{gL}{L^2 - r^2}} \quad (۳)$$

۱۸۹ - مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم زیر کدام گزینه است؟



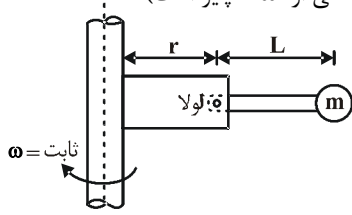
$$m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kr^2\dot{\theta}^2 + kr\dot{x}\dot{\theta} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta} + kx^2 + \frac{1}{2}kr^2\dot{\theta}^2 + kr\dot{x}\dot{\theta} \quad (۲)$$

$$m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta} + kx^2 + \frac{1}{2}kr^2\dot{\theta}^2 + kr\dot{x}\dot{\theta} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kr^2\dot{\theta}^2 \quad (۴)$$

۱۹۰- فرکانس طبیعی حرکت لرزشی جسم m را بدست آورید. (اثر میدان جاذبه در مقابل میدان جانبی ناشی از ω ناچیز است)



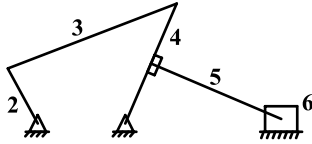
$$\omega_n = \omega \sqrt{\frac{2L}{L+r}} \quad (2)$$

$$\omega_n = \omega \sqrt{2\left(\frac{L}{r} + 1\right)} \quad (4)$$

$$\omega_n = \omega \sqrt{\frac{r}{L} + 1} \quad (1)$$

$$\omega_n = \omega \sqrt{2\left(\frac{r}{L} + 1\right)} \quad (3)$$

۱۹۱- مرکز آنی دوران (۳) کجا قرار دارد؟



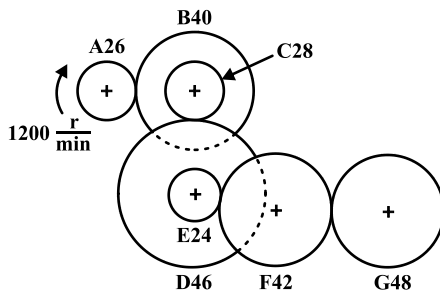
(۱) محل برخورد امتداد عضوهای ۲ و ۴

(۲) محل برخورد عضوهای ۲ و ۳

(۳) محل برخورد امتداد عضوهای ۳ و ۵

(۴) محل برخورد عضوهای ۳ و ۴

۱۹۲- سرعت و جهت حرکت چرخ دنده G کدام است؟



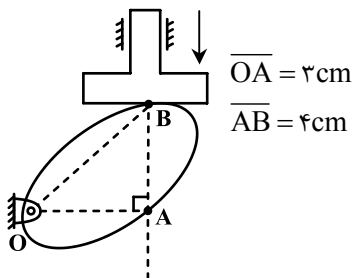
(۱) در خلاف جهت A

(۲) در جهت A

(۳) در خلاف جهت A

(۴) در جهت A

۱۹۳- در مکانیزم بادامک و پیرو نشان داده شده، پیرو با سرعت $6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ پایین می آید، سرعت زاویه ای و سرعت نقطه A بادامک به ترتیب کدامند؟



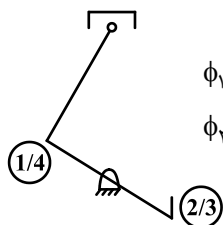
(۱) $6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

(۲) $1/2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

(۳) $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

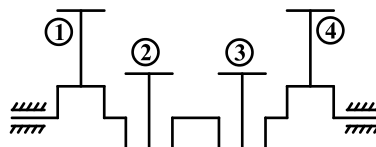
(۴) $1/5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

۱۹۴- در موتور چهار سیلندر مطابق شکل میل لنگها با زوایای نشان داده شده و موقعیت طولی مساوی نسبت به یکدیگر قرار گرفته اند. عوامل



$$\phi_1 = \phi_4 = 0^\circ$$

$$\phi_2 = \phi_3 = 180^\circ$$



نابالانسی در این مورد عبارتند از:

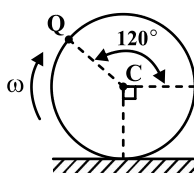
(۱) گشتاورهای اولیه و ثانویه

(۲) نیروهای اولیه و ثانویه

(۳) گشتاور اولیه و نیروی اولیه

(۴) گشتاور ثانویه و نیروی ثانویه

۱۹۵- اگر دیسک روبرو حرکت غلطشی داشته باشد، زاویه بین سرعت های نقطه C و Q کدام است؟



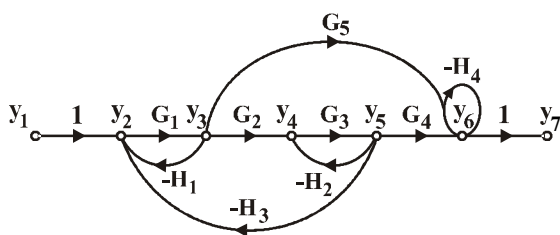
(۱) 30°

(۲) 15°

(۳) 20°

(۴) 10°

۱۹۶- در مسیر گذر سیستم مقابل بهره بین y_7 و y_7 کدام گزینه است؟



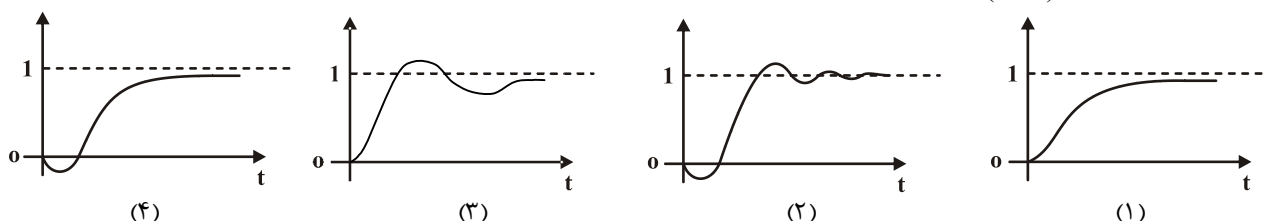
$$\frac{y_7}{y_7} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5}{1 + G_3 H_2 + H_4} \quad (1)$$

$$\frac{y_7}{y_7} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5}{1 + G_3 H_2 + H_4 + G_1 H_1} \quad (2)$$

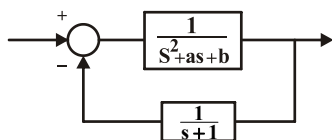
$$\frac{y_7}{y_7} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5 (1 + G_3 H_2)}{1 + G_3 H_2 + H_4 + G_3 H_2 H_4 + G_1 H_1 + G_1 G_3 H_3} \quad (3)$$

$$\frac{y_7}{y_7} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5 (1 + G_3 H_2)}{1 + G_3 H_2 + H_4 + G_3 H_2 H_4} \quad (4)$$

۱۹۷- پاسخ سیستمی با $G(s) = \frac{2-s}{s(4+s)}$ و $H(s) = 1$ به ورودی پله واحد کدام است؟



۱۹۸- می‌دانیم مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترلی حلقه بسته شکل زیر از نقاط $1 \pm j$ می‌گذرد. مقادیر a و b به ترتیب کدامند؟



(۱) ۵ و ۴

(۲) ۵ و ۳

(۳) ۴ و ۴

(۴) ۳ و ۳

۱۹۹- سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{و} \quad y = [1 \ 0] x \quad \text{و} \quad u = -[k_1 \ k_2] x$$

می‌خواهیم که نسبت میرایی سیستم حلقه - بسته برابر 0.5 و فرکانس طبیعی میرا نشده آن $1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ باشد، مقادیر k_1 و k_2 عبارتند از:

(۱) $k_1 = 2$ و $k_2 = 2$ (۲) $k_1 = -1$ و $k_2 = -2$ (۳) $k_1 = 2$ و $k_2 = 1$ (۴) $k_1 = 1$ و $k_2 = 2$

۲۰۰- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد کنترلرها صحیح می‌باشد؟

(۱) با کنترلر پس‌فاز، پاسخ‌گذاری سیستم بهبود یافته و با بالا بردن بهره جبران‌ساز، رفتار خطای آن اندکی بهتر می‌شود.

(۲) با کنترلر پیش‌فاز، زمان صعود و زمان نشست کاهش یافته ولی سرعت پاسخ‌دهی تغییر نمی‌کند.

(۳) کنترلر پس‌فاز باعث کاهش حدفاز سیستم می‌شود.

(۴) کنترلر PD باعث می‌شود که بیشترین فراجش (over shoot) بیشتر شده و سیستم پایدارتر می‌گردد.

۲۰۱- اتومبیلی با سرعت $72 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ در جاده‌ای با ضریب اصطکاک $\mu = 1$ حرکت می‌کند اگر راننده به یکباره ترمز کند، نسبت مسافت توقف کامل

اتومبیل در حالت چرخهای قفل نشده به حالت چرخهای قفل چقدر است؟ (در حالت قفل ضریب اصطکاک ۲۰٪ کاهش می‌یابد)

(۴) ۰/۸

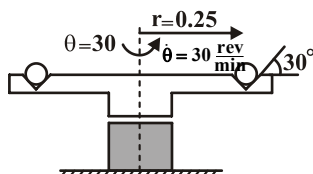
(۳) ۰/۶

(۲) ۰/۴

(۱) ۰/۲

۲۰۲- مطابق شکل صفحه گردانی که شامل گوی ۴ کیلوگرمی در شعاع 250 mm می‌باشد، با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta} = 30 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$ می‌چرخد، مطلوبست

مقدار و جهت نیروی عمودی بزرگتر وارد بر گوی سمت چپ؟ ($\pi = 3$, $\cos 30^\circ = 0.8$)



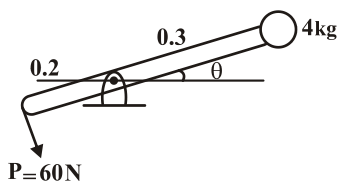
(۲) $34 \angle 30^\circ$

(۱) $16 \angle 30^\circ$

(۴) $34 \angle 30^\circ$

(۳) $16 \angle 30^\circ$

۲۰۳- دستگاه شکل مقابل از $\theta = 0$ رها می‌شود، سرعت گلوله ۴ کیلوگرمی در $\theta = 90^\circ$ چیست؟



(۱) صفر

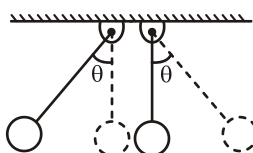
(۲) $\sqrt{6}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $2/2$

۲۰۴- پاندول A به جرم m از زاویه θ از حالت سکون رها شده و به پاندول ساکن B به جرم m برخورد می‌کند، اگر برخورد کاملاً پلاستیک

باشد جرم m تا چه زاویه‌ای حرکت می‌کند؟



(۱) $\tan \beta = \frac{\cos \theta + 1}{4} + 1$

(۲) $\cos \beta = \frac{\cos \theta - 1}{4} - 1$

(۳) $\tan \beta = \frac{\cos \theta - 1}{4} + 1$

(۴) $\cos \beta = \frac{\cos \theta - 1}{4} + 1$

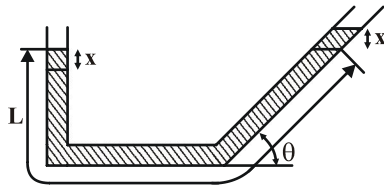
۲۰۵- قطعه کوچکی به جرم m از فاصله h بروی تیری می‌افتد. با فرض اینکه تغییر مکان تیر نسبت به h کوچک باشد بیشترین جابجایی تیر را

محاسبه کنید. (در محل اثر جرم m)

$$X = \sqrt{\frac{2mghL^3\alpha}{3EI}} \quad (2) \quad X = \sqrt{\frac{2mghL^3}{3EI}} \quad (1)$$

$$X = \sqrt{\frac{2mgh\alpha^3L^3}{3EI}} \quad (4) \quad X = \sqrt{\frac{2mghL^3\alpha^3}{3EI}} \quad (3)$$

۲۰۶ - سیالی مطابق شکل در لوله‌ای قرار دارد. فرکانس طبیعی سیستم چیست؟



A: سطح مقطع
rho: چگالی سیال

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g \sin \theta}{L}} \quad (1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g \sin \theta}{L}} \quad (2)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}} \quad (3)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (4)$$

۲۰۷ - کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

(۱) در حالت تشدید اختلاف فاز بین سیستم و تحریک 90° خواهد بود.

(۲) همواره مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n} \leq 1$ اتفاق می‌افتد.

(۳) در صورتی که $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ باشد، اختلاف فاز با افزایش میرایی کم می‌شود.

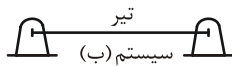
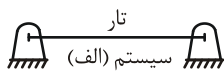
(۴) برای مقادیر $r > \sqrt{2}$ مقدار ضریب بزرگنمایی (T_d) به ازای جمع مقادیر ξ کوچکتر از ۱ است.

۲۰۸ - میله یکنواختی به طول b و جرم m در یک صفحه افقی حول نقطه ثابت O می‌تواند دوران کند. یک انتهای این میله به فنری با ثابت k و جرم ناچیز که در صفحه افقی قرار دارد بسته شده و سر دیگر به نقطه ثابت A وصل است. زمان تناوب نوسانات کوچک میله کدام است؟

$$2\pi\sqrt{\frac{6m}{k}} \quad (1) \quad 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}} \quad (2)$$

$$2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}} \quad (3) \quad 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} \quad (4)$$

۲۰۹ - سیستم (الف) یک تار با دو انتهای ثابت است و سیستم (ب) یک تیر دو سر مفصل می‌باشد کدام گزینه در مورد فرکانس‌ها و مودهای سیستم صحیح می‌باشد؟



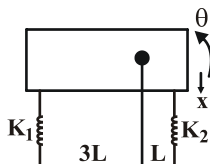
(۱) فرکانس‌های دو سیستم برابر ولی مودهای آن‌ها متفاوت می‌باشد.

(۲) فرکانس‌های دو سیستم متفاوت ولی مودهای آن‌ها یکسان می‌باشد.

(۳) فرکانس‌ها و مودهای دو سیستم متفاوت است.

(۴) بستگی به مقدار ضریب کشسانی تار و استحکام خمشی تیر دارد.

۲۱۰ - در سیستم دو درجه آزادی زیر برای آن که حرکت‌های θ و x غیر کوپل شوند باید:



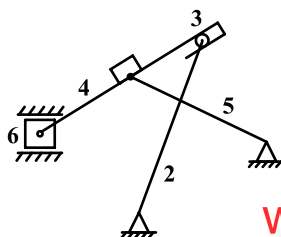
$$k_1 = \frac{k_2}{3} \quad (1)$$

$$k_1 = \frac{k_2}{4} \quad (2)$$

$$k_1 = 3k_2 \quad (3)$$

(۴) حرکت‌های x و θ همواره کوپل‌اند

۲۱۱ - درجه آزادی مکانیزم روبرو را تعیین کنید



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۱۲- در مکانیزم روبرو سرعت نقطه P چند است؟ اگر سرعت نقطه A $8 \frac{cm}{s}$ باشد.

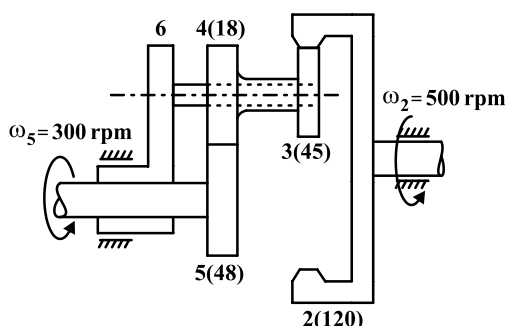
(۱) $6 \frac{m}{s}$

(۲) $13/3 \frac{cm}{s}$

(۳) $10 \frac{cm}{s}$

(۴) $6/4 \frac{m}{s}$

۲۱۳- در مجموعه چرخ‌دنده‌ای شکل روبرو، ورودی‌ها چرخ‌دنده خورشیدی ۵ و چرخ‌دنده ۲ هستند که با سرعت‌های زاویه‌ای $\omega_5 = 300 \text{ rpm}$ و $\omega_4 = 500 \text{ rpm}$ هر دو در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخند، دوران منتجه بازوی ۶ را بدست آورید.



(۱) این حرکت امکانپذیر نیست.

(۲) 800 rpm.CW

(۳) 400 rpm.CW

(۴) 400 rpm.CCW

۲۱۴- اگر فاصله میل‌لنگ‌ها مساوی باشد و با زوایای نشان داده نسبت به هم قرار گیرند عامل نابالانسی کدام است؟

(۱) نیروهای اولیه

(۲) نیروهای ثانویه

(۳) گشتاورهای اولیه

(۴) گشتاورهای ثانویه

۲۱۵- دیسک مدوری بدون لغزش به طرف راست می‌غلتد، اگر شتاب نسبی نقطه A نسبت به مرکز دیسک برابر $(-4\hat{i} + 10\hat{j}) \frac{cm}{s^2}$ باشد،

شتاب مرکز دیسک چقدر است؟

(۱) $10\hat{i} - 40\hat{j}$

(۲) $-10\hat{i} - 40\hat{j}$

(۳) $10\hat{i} + 40\hat{j}$

(۴) $-10\hat{i} + 40\hat{j}$

۲۱۶- نمودار بد سیستمی به صورت زیر می‌باشد تابع تبدیل آن کدام است؟

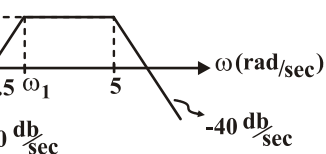
(۱) $g(s) = \frac{s}{(1+2s)(1+5s)}$

(۲) $g(s) = \frac{s}{(1+0.5s)(1+0.2s)}$

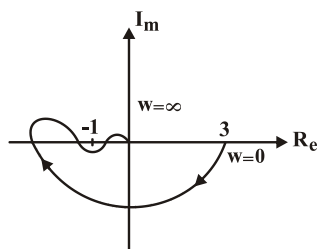
(۳) $g(s) = \frac{s}{(1+0.5s)(1+0.2s)^2}$

(۴) $g(s) = \frac{s}{(1+s)(1+0.25s)}$

n(db)



۲۱۷- شکل زیر نمودار نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی را نشان می‌دهد. بهره حالت ماندگار ($s=0$) تابع تبدیل حلقه بسته عبارتست از:



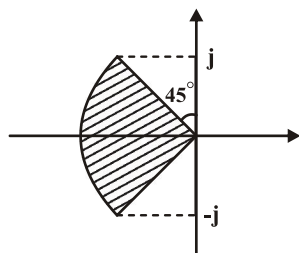
(۱) $0/25S$

(۲) $0/75S$

(۳) $0/5$

(۴) ۱

۲۱۸- مشخصات عملکرد سیستمی که قطب‌های غالب آن در ناحیه هاشور خورده است دارای چه ویژگی‌هایی می‌باشد؟



(۱) $\omega_n \geq 1, \xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\omega_n \geq \sqrt{2}, \xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\omega_n \leq 1, \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\omega_n \leq \sqrt{2}, \xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۱۹- تابع تبدیل سیستم زیر را که در فضای حالت داده شده بدست آورید:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} U$$

$$y = [1 \quad 0] X$$

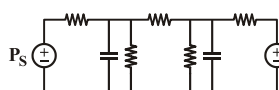
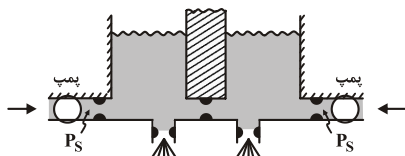
(۴) $\frac{3s+3}{s^2+s-4}$

(۳) $\frac{s+3}{(s+2)(s-1)}$

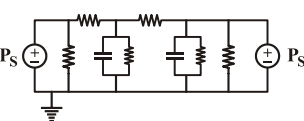
(۲) $\frac{s+2}{s^2+s-4}$

(۱) $\frac{3s+3}{s^2+s-2}$

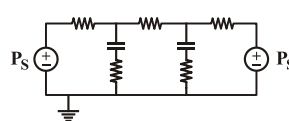
۲۲۰- سیستم هیدرولیکی شکل مقابل توسط دو عدد پمپ با فشار P_S تغذیه می‌شود. با فرض تشابه مکانیکی - الکتریکی، سیستم الکتریکی معادل را پیدا کنید.



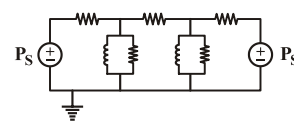
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

$$\dot{s} = v = \text{ثابت} = \frac{-a}{b} \sin \theta \cdot \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{-bv}{a \sin \theta}$$

$$\vec{v} = v \cos \theta \hat{i} + v \sin \theta \hat{j} \text{ و } \vec{a} = -v \sin \theta \cdot \dot{\theta} \hat{i} + v \cos \theta \cdot \dot{\theta} \hat{j}$$

$$|\vec{a}| = v \dot{\theta} = \frac{-bv^2}{a \sin \theta}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dt = \frac{dv}{c_1 - c_2 v^2} \rightarrow \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{c_1 - c_2 v^2} \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{c_1 c_2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} v$$

$$\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} v = \tanh(\sqrt{c_1 c_2} t) \text{ و } v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_0^{x_0} dx = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \int_0^{t_0} \tanh \sqrt{c_1 c_2} t dt$$

$$x_0 = \frac{1}{c_2} \times \ln[\cosh \sqrt{c_1 c_2} t_0] \rightarrow e^{x_0 c_2} = \cosh(\sqrt{c_1 c_2} t_0) \rightarrow c_1 = \frac{[\cosh^{-1}(e^{x_0 c_2})]^2}{t_0^2}$$

$$\dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta \rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{rg \cos \theta}{r l} d\theta \rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{rg}{r l} \sin \theta \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{rg \sin \theta}{l}$$

$$\rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{rg \sin \theta}{l}} \rightarrow \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{rg \sin \theta}{l}}} = \int_0^t dt \rightarrow t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{rg}{l} \sin \theta}}$$

$$\rightarrow t = A \sqrt{\frac{l}{rg}}$$

۴ - گزینه «۲»

با توجه به ترم‌های شتاب در حرکت به سوی بالا و پایین که دقیقاً قرینه‌اند مشخص می‌شود که سرعت برگشت توپ به زمین همان $20 \frac{m}{s}$ می‌باشد.

۵ - گزینه «۲»

$$\begin{cases} 2y_A + y_C = cte \\ 2(L - y_C) - (L - y_D) = cte \\ 2(L - y_D) + y_B = cte \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_A + a_C = 0 \\ a_D - 2a_C = 0 \\ a_B - 2a_D = 0 \end{cases} \rightarrow a_B = 4a_A \Rightarrow a_B = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \frac{m}{s^2}$$

۶ - گزینه «۳»

$$\begin{aligned} k_1, k_2 \quad \frac{1}{k_{12}} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k_{12} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \\ \frac{1}{2} k_{eq} \theta^2 &= \frac{1}{2} k_r \theta^2 + \frac{1}{2} k_{12} \theta^2 + \frac{1}{2} k_f (R\theta)^2 + \frac{1}{2} (k_\delta + k_\epsilon) (R\theta)^2 \\ \rightarrow k_{eq} &= k_r + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + (k_f + k_\delta + k_\epsilon) R^2 \end{aligned}$$

۷ - گزینه «۴»

$$\delta = \text{Ln}\left(\frac{10}{0.9}\right) = 0.1 \rightarrow \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.1 \rightarrow \zeta = 16 \times 10^{-3}$$

۸ - گزینه «۳»

میله حول خط عمودی که از مرکز جرم می‌گذرد نوسان می‌کند.

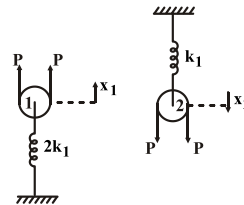
۹ - گزینه «۴»

کشش طناب $P =$ و جابجایی‌های پولی‌های ۱ و ۲ $x_1, x_2 =$

$$(۱) \text{ برای پولی ۱: } 2P = 2k_1 x_1$$

$$(۲) \text{ برای پولی ۲: } 2P = k_1 x_2$$

$$(۳) \text{ جابجایی کل: } x = 2x_1 + 2x_2$$



$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ در } (۳): x = 2\left(\frac{P}{k_1}\right) + 2\left(\frac{2P}{k_1}\right) = \frac{6P}{k_1} \rightarrow k_{eq} = \frac{P}{x} = \frac{k_1}{6} \rightarrow m\ddot{x} + k_{eq}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1}{6m}}$$

۱۰ - گزینه «۲»

$$Lp\ddot{x} + 2pxg = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{L}x = 0 \rightarrow \omega_n^2 = \frac{2g}{L} \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \rightarrow T_n = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

۱۱ - گزینه «۱»

$$۳۰ + ۱۰۰ \leq ۶۰ + x \rightarrow x \geq ۷۰$$

$$۳۰ + x - ۶۰ < ۱۰۰ \rightarrow x < ۱۳۰ \rightarrow ۱۳۰ - ۷۰ = ۶۰$$

۱۲ - گزینه «۲»

$$3(n-1) - 2f_1 - f_2 = 18 - 2(7) - 1 = 3$$

۱۳- گزینه «۱»

$$3(n-1) - 2f_1 - f_2 = 15 - 2(7) = 1$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

۱۴- گزینه «۲»

مرکز آنی زمین و عضو ۳ در امتداد عضو ۴ و در ∞ می‌باشد.

۱۵- گزینه «۱»

با رسم کردن چند موقعیت خاص، شکل ۱ پدیدار می‌شود.

۱۶- گزینه «۱»

$$\frac{c_1}{R_2} = \frac{-G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}$$

۱۷- گزینه «۳»

$$x_1 \text{ در حلقه } \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + r$$

$$x_2 \text{ در حلقه } \dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_2 - r = x_1 - \frac{3}{2}x_2 - r$$

$$y = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_2 - r = x_1 - \frac{3}{2}x_2 - r$$

$$\rightarrow [\dot{x}] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad -\frac{3}{2}] [x] + [-1] r$$

۱۸- گزینه «۴»

$$SI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(SI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{s+4}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{3}{\Delta} & \frac{s}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1 \cdot 0}{s^2 + 4s + 3}$$

۱۹- گزینه «۴»

$$G(s) = \frac{c(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s(s+3)}}{1 + \frac{k}{s(s+2)(s+3)}} = \frac{k(s+2)}{s(s+2)(s+3) + k}$$

معادله مشخصه : $s^3 + 5s^2 + 6s + k$

$$\begin{array}{l} s^3 \quad 1 \quad 6 \\ s^2 \quad 5 \quad k \\ s \quad \frac{3 \cdot 0 - k}{5} \quad \frac{3 \cdot 0 - k}{5} > 0 \rightarrow \boxed{k < 3 \cdot 0} \\ s^0 \quad k \end{array}$$

$$s^f \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

$$s^r \quad 1 \quad 3$$

$$s^l \quad 0 \approx \varepsilon \quad 6$$

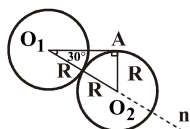
$$\boxed{\varepsilon > 0}$$

$$s \quad \frac{3\varepsilon - 6}{\varepsilon} \quad \frac{3\varepsilon - 6}{\varepsilon} = 3 - \frac{6}{\varepsilon} \approx -\frac{6}{\varepsilon} < 0$$

$$s^o \quad 6$$

۲۱ - گزینه «۲»

در زمان برخورد دو گوی همانند شکل مقابل داریم:



چون در مثلث قائمه O_1O_2A یک ضلع نصف وتر است پس زاویه $O_2\hat{O}_1A$ برابر است با 30° درجه، با فرض نبود اصطکاک بین دو گلوله، نیروی مبادله بین آنها تنها در راستای n (خط واصل مراکز گوی‌ها) خواهد بود و در نتیجه سرعت گلوله ۲ در راستای عمود بر n (به دلیل نداشتن سرعت اولیه و تکانه در این راستا) صفر خواهد ماند. بقای اندازه حرکت در راستای n نتیجه می‌دهد:

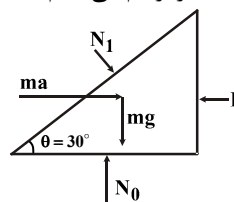
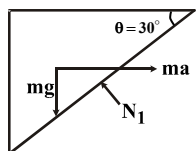
$$\left. \begin{aligned} V_0 \cos 30^\circ &= V'_{1n} + V'_{2n} \\ e &= -\frac{V'_{2n} - V'_{1n}}{V_{2n} - V_{1n}} = -\frac{V'_{2n} - V'_{1n}}{0 - V_0 \cos 30^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V'_{2n} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+e)V_0 = V_r$$

همین شرایط و روابط برای برخورد بین گوی دوم و گوی سوم نیز برقرار است، پس:

$$V_3 - V'_{3n} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+e)V_r = \frac{3}{16}(1+e)^2 V_0$$

۲۲ - گزینه «۱»

ابتدا دیاگرام تعادلی دو قطعه را رسم می‌کنیم: (طبق اصل دالامبر)



$$A \text{ قطعه: } \left. \begin{aligned} \sum F_x &= ma \Rightarrow N_1 \sin \theta = ma \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow N_1 \cos \theta = mg \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \tan \theta &= \frac{a}{g} \Rightarrow a = g \tan \theta \quad (1) \\ N_1 &= \frac{ma}{\sin \theta} \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$B \text{ قطعه: } \sum F_x = ma \Rightarrow -N_1 \sin \theta + P = ma \Rightarrow (2) \Rightarrow P = 2ma \Rightarrow (1) \Rightarrow P = 2mg \tan \theta = \frac{2mg}{\sqrt{3}}$$

نکته: از اول می‌توان دو بلوک را به صورت یک جسم مجزاء در نظر گرفت و طبق قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = (2m)\ddot{x} \Rightarrow P = 2ma$$

$$W_F = \Delta K + \Delta V_g \quad (1)$$

دقت شود جابه‌جایی خالص در راستای نیرو برابر است. $d = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2} - \frac{1}{10}$

$$F \text{ کار نیروی } = F \times d = 10 \times \frac{4}{10} = 4 = W_F$$

$$\Delta V_g = mg\Delta h = 1 \times 10 \times 0.3 = 3$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{V^2}{2}$$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow V = \sqrt{2} \frac{m}{s}$$

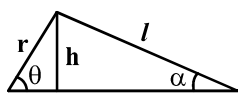
نکته: اگر یک نیرو در راستای عمود بر مسیر حرکت جابه‌جا شود، کاری انجام نمی‌دهد.

با نوشتن رابطه سرعت نسبی برای بازوی BC داریم:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B} \quad (*)$$

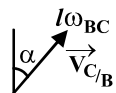
$$\vec{V}_C = V_C \vec{i} \quad , \quad \begin{array}{c} \vec{V}_B \\ \theta \\ \swarrow \text{r}\omega \end{array} \Rightarrow \vec{V}_B = r\omega \sin \theta \vec{i} - r\omega \cos \theta \vec{j}$$

و برای نوشتن سرعت نسبی $\vec{V}_{C/B}$ به صورت برداری داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \sin \theta \\ \sin \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow r \sin \theta = l \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{r \sin \theta}{l} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}$$

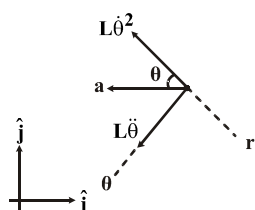


$$\Rightarrow \vec{V}_{C/B} = l\omega_{BC} \sin \alpha \vec{i} + l\omega_{BC} \cos \alpha \vec{j}$$

با جایگذاری سرعت‌های برداری فوق در رابطه (*) داریم:

$$V_C \vec{i} = r\omega \sin \theta \vec{i} - r\omega \cos \theta \vec{j} + l\omega_{BC} \sin \alpha \vec{i} + l\omega_{BC} \cos \alpha \vec{j} \Rightarrow$$

$$l\omega_{BC} \cos \alpha = r\omega \cos \theta, \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{r\omega}{l} \times \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}}$$



$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O} = a\vec{i} - L\omega^2\hat{r} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -T + mg \sin \theta = m[-L\dot{\theta}^2 - L\ddot{\theta}] \quad (۱)$$

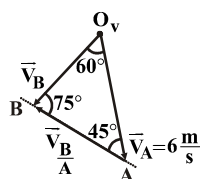
$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow mg \cos \theta = m[L\ddot{\theta} + a \sin \theta] \quad (۲)$$

$$(۲) \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{[g \cos \theta - a \sin \theta]}{L}$$

$$\ddot{\theta} d\theta = \dot{\theta} d\dot{\theta} \Rightarrow \int_0^\theta \ddot{\theta} d\theta = \int_0^\theta \frac{(g \cos \theta - a \sin \theta)}{L} d\theta = \frac{1}{L} [g \sin \theta + a \cos \theta - a]$$

$$\int_0^\theta \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{L} [g \sin \theta + a(\cos \theta - 1)]}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$



$$\frac{|\vec{V}_B|}{\sin 60^\circ} = \frac{|\vec{V}_A|}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \vec{V}_A = \frac{6 \times \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 6\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_{B/A}}{|AB|} = 1/\sqrt{2} \frac{rad}{s}$$

۲۷ - گزینه «۱»

نکته: شتاب مرکز دیسک در حالت غلتش خالص برابر است با مقدار $r\alpha$ و راستای شتاب، کاملاً افقی است

$$a_c = a_A + a_{c/A} = r\alpha\hat{i} + (r\alpha\hat{i} - r\omega^2\hat{j}) = r\alpha\hat{i} - r\omega^2\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_c| = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

۲۸ - گزینه «۳»

روش اول: سریع‌ترین روش برای حل تست از روش مرکز آنی دوران است.

نکته: سرعت محل برخورد دیسک غلتان با زمین برابر صفر است (نقطه C در شکل) پس می‌توان گفت مرکز آنی دوران دیسک در هر لحظه نقطه C می‌باشد.

$$\omega = \frac{|V_o|}{r} = \frac{10}{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$AC^2 = OC^2 + OA^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos\theta = 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos(90^\circ + 30^\circ)$$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{61}}{10} \Rightarrow V_A = |AC| \cdot \omega = \sqrt{61}$$

$$\Rightarrow |\vec{V}_A| = \sqrt{61} \quad \vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{A/C} = \vec{\omega} \times \vec{OA} = \omega\hat{i} + (-10)\hat{k} \times (5\hat{j} - \frac{2\sqrt{3}}{10}\hat{i})$$

روش دوم:

۲۹ - گزینه «۴»

نکته: اگر دو نقطه از یک جسم صلب دارای سرعت یکسان (هم از نظر جهت و هم از نظر اندازه) باشند، آن جسم در آن لحظه فقط دارای حرکت انتقالی است و دوران نمی‌کند یا می‌توان گفت مرکز آنی دوران جسم در بی‌نهایت قرار دارد. جسم ۳ نیز در همین وضعیت قرار دارد و مرکز آنی دوران میله AB در بی‌نهایت قرار دارد (در راستای O_2A)

$$\vec{V}_A = O_2A \cdot \omega = \vec{V}_B = \vec{V}_C$$

پس نقطه C سرعتی برابر $O_2A \cdot \omega$ در راستای افق (در راستای میله CD) دارد از آنجا که نقطه C سرعتی عمود بر میله ندارد، طبق قضیه خط انتقال $\vec{V}_C = \vec{V}_D = \vec{V}_A$ (نقطه D هم فقط حرکت افقی دارد).

قضیه خط انتقال: در لینک‌های صلب، مولفه سرعت هر دو نقطه، در راستای خط واصل بین نقاط، یکسان است.

با توجه به مفهوم خط انتقال نتیجه می‌شود که باید مولفه‌های سرعت نقاط A, B در راستای خط انتقال AB برابر باشند اما چون در لحظه مورد نظر سرعت این دو نقطه افقی است، پس بردار سرعت نقاط A, B یکسان است و در نتیجه باید به طور لحظه‌ای سرعت زاویه‌ای عضو ۳ صفر باشد ($\omega_3 = 0$)

$$\vec{V}_C = V_A + \vec{V}_C = \vec{V}_A + AC \times \omega_3 = \vec{V}_A$$

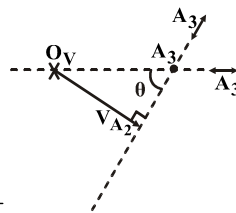
A

۳۰- گزینه «۳»

اندازه سرعت \vec{V}_{A_3} و $\vec{V}_{\frac{A_3}{A_2}}$ مشخص نیست.

$$\vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{\frac{A_3}{A_2}}$$

اگر روی میله ۲ بنشینیم، می بینیم که لینک ۳ به سمت شما می آید یعنی در راستای لینک ۲ حرکت می کند. نقطه A_3 نیز مجبور است که در راستای شیار نیز حرکت کند.



$$V_{A_2} = L \times \omega = \frac{h\omega}{\sin \theta} \Rightarrow V_{A_3} = \frac{V_{A_2}}{\sin \theta} = \frac{h\omega}{\sin^2 \theta}$$

* دقت شود که سرعت A_2 عمود بر میله است پس می توان گفت راستای سرعت A_2 و A_3 برهم عمود هستند. (سرعت لغزنده ۳ و ۴ یکی است).

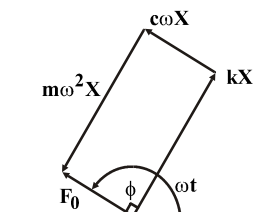
۳۱ - گزینه «۱»

$$X_{res} = \frac{F}{c\omega_n} = \frac{F \cdot \tau}{2\pi C} \Rightarrow C = \frac{F \cdot \tau}{2\pi X_{res}} = \frac{24/46 \times 10^{-2}}{2\pi \times 1/27 \times 10^{-2}} = 61/3 \frac{Ns}{m}$$

در حالت تشدید خواهیم داشت:

نکته: دقت شود که این فرمول از حل کردن مسأله به صورت ترسیمی به دست می آید.

در حالت $\omega = \omega_n$: $\phi = 90^\circ$ زاویه فاز



۳۲ - گزینه «۳»

چون سیستم خطی است می‌توان از اصل برهم نهی استفاده کرد:

$$x(t) = x_1(t) + x_r(t) + x_f(t)$$

$$X_1(t) = \frac{F_1}{k - m\omega^2} = \frac{10}{10 - 1 \times (0/\Delta)^2} = 1/0.3 \Rightarrow x_1(t) = 1/0.3 \sin 0/\Delta t$$

$$X_r(t) = \frac{F_r}{k - m\omega^2} = \frac{10}{10 - 1 \times (1/\Delta)^2} = 1/29 \Rightarrow x_r(t) = 1/29 \cos 1/\Delta t$$

۳۳ - گزینه «۳»

$$\sum F = ma \Rightarrow -k(x - y) = m\ddot{x}$$

باید معادلات دینامیکی خودرو را نوشت:

$$y = Y \sin \omega t = Y \sin\left(\frac{2\pi V}{L} t\right) \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + kx = kY \sin(\omega t) \Rightarrow x_p = X \sin \omega t$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \text{اگر } \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \text{ مخرج کسر} = 0 \Rightarrow V = \frac{L}{2\pi} \sqrt{k/m}$$

* مهم‌ترین کار در انجام مسائل ارتعاشاتی نوشتن معادله دینامیکی مسئله به صورت صحیح است.

۳۴ - گزینه «۳»

با استفاده از معادله اوایلر معادله دینامیکی سیستم را می‌نویسیم: (نیروی وارد از طرف بالای جرم $T = m$)

$$\sum M = J\ddot{\theta} \Rightarrow J_o\ddot{\theta} = -T(r_1) - k(r_1\theta)r_1 - c(r_1\dot{\theta})r_1 + M_o \sin \omega t$$

$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx + T - F_o \cos \omega t \Rightarrow T = kx + F_o \cos \omega t$$

← شرط غلتش ناب در سیستم برابر است با: $x = r_1\theta = 2r_1\theta$

$$\Rightarrow J_o\left(\frac{\ddot{x}}{2r_1}\right) = -2r_1[kx + F_o \cos \omega t + m\ddot{x}] - 4kr_1^2\theta - cr_1^2\dot{\theta} + M_o \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \left(m + \frac{J}{4r_1^2}\right)\ddot{x} + 2kx + \frac{c\dot{x}}{2} = \frac{M_o}{2r_1} \sin \omega t - F_o \cos \omega t$$

۳۵ - گزینه «۳»

$$\left\{ \begin{aligned} f = 6 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 12 \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = 12 \pi \text{ rad} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = \frac{(12 \pi)^2 W}{g} = 14/2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

چون سختی تمام گزینه‌ها کمتر از مقدار به دست آمده است لذا نسبت $\frac{\omega}{\omega_n}$ برای تمام گزینه‌ها بزرگتر از یک می‌باشد. در ناحیه $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ (در نمودار نسبت انتقال‌پذیری برحسب $\frac{\omega}{\omega_n}$) هر چه مقدار $\frac{\omega}{\omega_n}$ بزرگتر باشد TR (نسبت انتقال‌پذیری) مقدار کمتری دارد و نیروی ارتعاش کمتری به پایه منتقل می‌شود. بنابراین گزینه (۳) صحیح است چرا که کمترین سختی و ω_n را دارد.

۳۶ - گزینه «۳»

دقت شود که برای رسم مکان هندسی برحسب بهره k ، باید معادله مشخصه به صورت $1 + kG(s)H(s) = 0$ نوشته شود.

$$\Rightarrow s^2 + ks^2 + s + 5ks + 6k = s^2 + s + k(s^2 + 5s + 6) = 0 \Rightarrow 1 + k \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0$$

پس تابع تبدیل حلقه باز برابر است با $\frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = G(s)H(s)$ که دارای دو قطب $-1, 0$ و دو صفر $-2, -3$ می‌باشد. تعداد مجانب‌های سیستم برابر باست با:

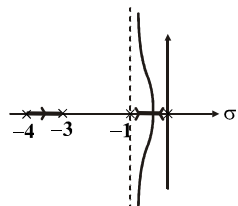
$$0 = 2 - 2 = \text{درجه صورت} - \text{درجه مخرج} = \text{تعداد مجانب}$$

* دقت شود که حتماً تابع تبدیل حلقه باز برای رسم مکان هندسی لازم است و حتماً در فرم $1 + kGH(s) = 0$ باشد.

۳۷ - گزینه «۱»

$$\text{تعداد مجانب‌ها} = n - m = 3 - 1 = 2$$

$$\sigma = \frac{\sum P - \sum Z}{n - m} = \frac{-1 - 4 - (-3)}{3 - 1} = -1$$



سیستم فقط به ازای $k = 0$ نوسانی می‌شود و به ازای تمام مقادیر $k > 0$ پایدار است چرا که نمودار مکان هندسی در سمت چپ محور موهومی قرار دارد. همچنین فاصله $[-\infty, -4]$ جزء مکان هندسی نیست، چرا که در سمت راست این بازه تعدادی زوج، قطب و صفر وجود دارد.

$$E(S) = R(S) - C(S)H(S) = R(S)[1 - F(S)H(S)]$$

$$F(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)} = \frac{\frac{k}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{k(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3) + k}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3) + k}\right) = 1 - \frac{k}{6+k} = \frac{6}{6+k} \Rightarrow k = 94$$

حال شرط پایداری را چک می‌کنیم:

$$(s+1)(s+2)(s+3) + k = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + k = 0$$

با توجه به جدول راث می‌بینیم که به ازای $k = 94$ سیستم پایدار نیست.

$$\begin{array}{l|ll} S^3 & 1 & 11 \\ S^2 & 6 & 6+k \\ S^1 & \frac{66-6-k}{6} & 0 \\ S^0 & 6+k & \end{array} \Rightarrow -6 < k < 60$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{خروجی} = C(s) \\ \text{ورودی} = R(s) \\ \frac{k}{(s+1)(s+2)} = G(s) \\ \frac{1}{s+3} = H(s) \end{array} \right\} *$$

* نکته: می‌توان مسئله را از فرمول $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{SR(s)}{1 + G(s)H(s)}$ نیز حل کرد.

* در شکل سیستم خطا عبارت است از مقدار عددی بعد از تفاضل‌گر.

۳۹- گزینه «۲»

از روی شکل می‌توان تابع تبدیل حلقه باز را به دست آورد چون فقط سه قطب $s = -5, -2, 0$ داریم، لذا:

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+5)}$$

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow s(s+2)(s+5) + k = s^3 + 7s^2 + 10s + k = 0$$

حال جدول راث - هروتیس را تشکیل می‌دهیم:

وقتی ستون اول صفر شود سیستم به حالت نوسانی در می‌آید.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 7 & k \\ s^1 & \frac{70-k}{7} & 0 \\ s^0 & k & \end{array} \Rightarrow k_c = 70$$

$$7s^2 + k = 7s^2 + 70 = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{10}$$

* از روی شکل مکان هندسی می‌توان تابع تبدیل حلقه باز و در نتیجه تابع تبدیل حلقه بسته و در نهایت معادله مشخصه را به دست آورد.

۴۰- گزینه «۱»

اگر نقطه S_1 جزء مکان هندسی باشد باید در شرط اندازه و زاویه صدق کند.

$$|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{18s+k}{s^2(s+10)} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{18(-1+j)+k}{(-1+j)^2(-1+j+10)} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(k-18)+18j}{-2j(9+j)} \right| = \left| \frac{(k-18)+18j}{(-18j+2)} \right| = \frac{\sqrt{(k-18)^2+18^2}}{\sqrt{18^2+2^2}} = 1 \Rightarrow k = 16$$

۴۱- گزینه «۳»

ابتدا معادلات مربوط به حرکت پرتابه را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & a_y &= -g \\ v_x &= v_0 \cos \theta & v_y &= -gt + v_0 \sin \theta \\ x &= (v_0 \cos \theta)t & y &= -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t \end{aligned}$$

زمانی که گلوله مجدداً به $y = 0$ می‌رسد $t = \frac{2v \sin \theta}{g}$

برد پرتابه $x = R = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

حرکت با شتاب ثابت تانک:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ \frac{\cancel{x} \sin 2\theta}{g} &= \frac{1}{\cancel{x}} a \left(\frac{\cancel{x}^2 \sin 2\theta}{g} \right) \Rightarrow a = \frac{g}{2} \frac{\cancel{x} \sin 2\theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} = g \cot \theta \end{aligned}$$

۴۲ - گزینه «۱»

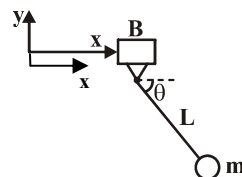
به مجموعه در جهت افقی هیچ نیرویی اعمال نمی‌شود. بنابراین مؤلفه‌ی شتاب مرکز جرم در جهت افقی صفر است همچنین با توجه به اینکه از حالت سکون حرکت می‌کند بنابراین مؤلفه‌ی x مرکز جرم تغییر نمی‌کند.

$$\bar{x} = \frac{m_B x + m_A (x + L \cos \theta)}{m_A + m_B}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{m}{2} x + m(x + L \cos \theta)}{\frac{3}{2} m}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} L$$

$$\bar{x} = x$$



زمانیکه $\theta = 0$ ، $x = 0$

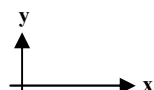
زمانیکه $\theta = \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\boxed{x = \frac{2}{3} L} = 0.6L$$

بنابراین، بزرگتر است بنابراین برخورد صورت می‌گیرد.

۴۳ - گزینه «۲»

معادلات سرعت برای جسم صلب را می‌نویسیم:



$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{A/O}$$

$$\vec{V}_O = V \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{A/O} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/O}$$

$$\vec{r}_{A/O} = r(\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) \quad , \quad \vec{\omega} = -\omega \vec{k}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/O} = -\omega \vec{k} \times (r \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) = -r\omega \cos \varphi \cdot \vec{j} + r\omega \sin \varphi \cdot \vec{i}$$

$$\vec{V}_A = -V \cos \varphi \cdot \vec{j} + (V \sin \varphi + V) \vec{i}$$

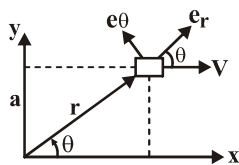
$$V_A = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} v\right)^2 + \left(\frac{3}{2} v\right)^2} = V \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = V \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} V$$

۴۴ - گزینه «۲»

روابط مربوط به سرعت و شتاب در مختصات قطبی را می‌نویسیم:

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

سرعت و شتاب در دستگاه xy را به دستگاه قطبی منتقل می‌کنیم:



$$v_r = v \cos \theta = \dot{r} \quad v_\theta = -v \sin \theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = 0, \quad a_\theta = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

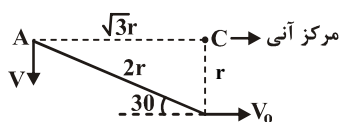
$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 = \cancel{r} \left(\frac{v^2 \sin^2 \theta}{\cancel{r}^2} \right) = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{r}$$

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\sin \theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{\frac{a}{\sin \theta}} = \frac{v^2}{a} \sin^3 \theta$$

۴۵ - گزینه «۳»

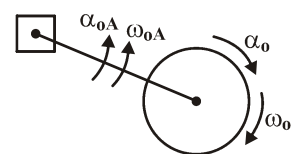
با استفاده از مفهوم مرکز آنی سرعت زاویه‌ای میله OA و دیسک O را تعیین می‌کنیم:



$$\omega_{OA} = \frac{V}{\sqrt{3}r}$$

$$V_O = r \times \omega_{OA} = r \times \frac{V}{\sqrt{3}r} = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

$$\omega_O = \frac{V_O}{r} = \frac{V}{r\sqrt{3}}$$



روابط شتاب در جسم صلب را می‌نویسیم:

$$a_A = a_O + a_A)_t + a_A)_n$$

$$a_A = 0, \quad a_O = r\alpha_O \vec{i}, \quad a_A)_t = \vec{\alpha}_{OA} \times \vec{r}_A = -r\alpha_{OA} \sin 30^\circ \vec{i} - r\alpha_{OA} \cos 30^\circ \vec{j}$$

$$a_A)_n = +r\omega_{OA}^2 \cos 30^\circ \vec{i} - r\omega_{OA}^2 \sin 30^\circ \vec{j}$$

$$r\alpha_O - r\alpha_{OA} \sin 30^\circ + r\omega_{OA}^2 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow \alpha_O = r(-\omega_{OA}^2 \tan 30^\circ) \sin 30^\circ - r\alpha_{OA} \cos 30^\circ$$

$$-r\alpha_{OA} \cos 30^\circ - r\omega_{OA}^2 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow \alpha_{OA} = -\omega_{OA}^2 \tan 30^\circ$$

$$\alpha_O = -r\omega_{OA}^2 (\tan 30^\circ \sin 30^\circ + \cos 30^\circ) = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \omega_{OA}^2$$

۴۶ - گزینه «۱»

با توجه به اینکه سرعت دیسک ω ثابت می‌باشد تغییر زاویه A برابر است با:

$$\Delta\theta = \omega t = \omega \times \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} \text{ (rad)}$$

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_B = r\omega_B \vec{i}$$

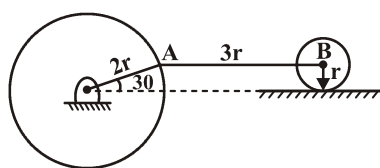
$$V_A = r\omega_A (\sin\varphi \cdot \vec{i} - \cos\varphi \cdot \vec{j})$$

$$\vec{r}_{B/A} = r\vec{i}$$

$$\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = \omega_{AB} \vec{k} \times r\vec{i} = r\omega_{AB} \vec{j}$$

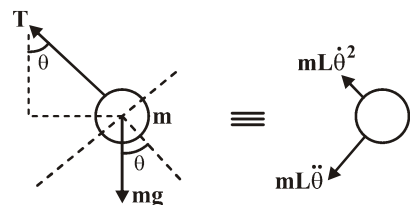
$$r\omega_B \vec{i} = r\omega_A \sin\varphi \cdot \vec{i} - r\omega_A \cos\varphi \cdot \vec{j} + r\omega_{AB} \vec{j}$$

$$r\omega_B = r\omega_A \times \frac{1}{\cancel{\varphi}} \Rightarrow \omega_B = \omega_A = \omega$$



۴۷ - گزینه «۲»

ترسیمه آزاد را برای جرم m رسم می‌کنیم:



$$\Sigma F_t = ma_t, \quad F_t = mgsin\theta$$

$$a_t = L\ddot{\theta} - a_o \sin\theta$$

$$L\ddot{\theta} = g \sin\theta + a_o \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} d\theta = \dot{\theta} d\dot{\theta}$$

$$\int_{\theta_o}^{\theta} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{1}{L} \int_{\theta_o}^{\theta} (g \sin\theta + a_o \sin\theta) d\theta$$

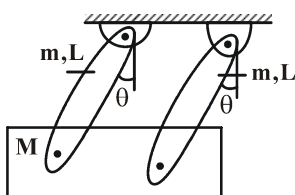
$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{L} [g(1 - \cos\theta_o) + (1 - \cos\theta_o)]$$

$$F_n = ma_n \Rightarrow T_o - mg \cos\theta = m[L\dot{\theta}^2 + a_o \cos\theta]$$

$$\text{if } \theta = \theta_o \Rightarrow T_o = m[L\dot{\theta}^2 + a_o + mg] \Rightarrow T_o = m(g + a_o)[r - r \cos\theta_o] \xrightarrow{\theta_o = \frac{\pi}{2}} T_o = rm(g + a_o)$$

۴۸- گزینه «۱»

تعداد مجموعه در لحظه‌ای که زاویه میله‌ها، با راستای عمود صفر است را در نظر می‌گیریم حال اگر نوسانات کوچک θ را برای مجموعه در نظر بگیریم، در میله به جرم m حرکت دورانی و بلوک به جرم M حرکت انتقالی انجام می‌دهند. لذا داریم:



$$T = \frac{1}{2} M (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \left(\frac{1}{2} m l^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

انرژی جنبشی

$$V = (2m)g \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) + Mgl(1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{d}{dt} (T + V) = 0$$

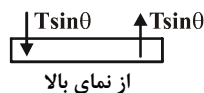
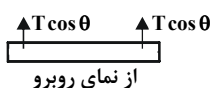
انرژی پتانسیل

$$\Rightarrow M l^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{3} m l^2 \ddot{\theta} + mgl(\sin \theta) \dot{\theta} + Mgl(\sin \theta) \dot{\theta} = 0$$

با توجه به کوچک بودن نوسانات $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta \Rightarrow (M + \frac{2}{3}m)l^2 \ddot{\theta} + (m + M)gl\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l} \left(\frac{m + M}{M + \frac{2}{3}m} \right)}$

۴۹- گزینه «۲»

حل این تست را از طریق روش نیوتن انجام می‌دهیم، یعنی ابتدا با استفاده از روش نیوتن معادلات حرکت را پیدا می‌کنیم و سپس فرکانس طبیعی را می‌یابیم. فرض می‌کنیم که میله به طول $2b$ حول محور $O-O$ چرخش افقی کوچک به اندازه γ انجام می‌دهد. در اثر این چرخش کابل‌ها نیز کشیده می‌شوند و نیروی کشش T در کابل‌ها به وجود می‌آید. از طرفی زاویه کابل‌ها نیز با محور عمود بر میله دیگر صفر نیست و دارای زاویه کوچک θ می‌باشد (برای درک این مطلب به دید سه بعدی نیاز است) که اگر این زاویه را در نظر بگیریم و با تصور دید سه بعدی از مساله بعد از دوران کوچک γ نیروها در کابل‌ها به شکل زیر خواهند بود:



که از دو نیروی تصویر شده در بالا نیروی $T \cos \theta$ به دلیل موازی بودن با محور $O-O$ حول این محور گشتاور ایجاد نمی‌کند و فقط نیروی $T \sin \theta$ گشتاور ایجاد می‌کند لذا با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum M_O = \bar{I} \alpha \Rightarrow \begin{array}{c} \uparrow T \sin \theta \\ \downarrow T \sin \theta \end{array} \equiv \begin{array}{c} \curvearrowright \bar{I} \alpha \end{array}$$

$$-r T \sin \theta a = \left(\frac{1}{r} m (rb)^r \right) \ddot{\gamma} \quad (*) \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow r T \cos \theta = mg \Rightarrow r T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{-mg \sin \theta}{\cos \theta} a = \frac{1}{r} m b^r \ddot{\gamma} \Rightarrow \text{به دلیل کوچکی } \theta \Rightarrow \tan \theta \approx \theta \Rightarrow b \ddot{\gamma} + r g a \theta = 0 \quad (**)$$

حال باید رابطه بین γ و θ را بیابیم. با دوران افقی میله به اندازه γ در نقطه a میله به اندازه γa دوران می‌کند ضمن این‌که از طرفی به اندازه $l \theta$ دوران می‌کند لذا داریم:

$$l \theta = a \gamma \Rightarrow \theta = \frac{a}{l} \gamma$$

با جایگذاری در رابطه $(**)$ داریم:

$$b \ddot{\gamma} + \frac{r g a^r}{l} \gamma = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{r g}{l} \cdot \frac{a^r}{b^r}}$$

۵۰- گزینه «۳»

برای بدست آوردن فرکانس طبیعی میرا با توجه به فرمول زیر داریم:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{K_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}} - \left(\frac{C_{\text{eff}}}{r m_{\text{eff}}} \right)^r}$$

بنابراین ابتدا باید جرم و فنر و دمپر موثر (معادل) را بدست آوریم لذا از رابطه انرژی داریم:

$$\frac{d}{dt} (T + v) + C_{\text{eff}} \dot{q}^r = 0 \quad (*)$$

نکته: زمانی که دمپر در سیستم وجود داشته باشد رابطه انرژی به صورت مقابل می‌باشد:

$$T = \frac{1}{r} m (a \dot{\theta})^r = \frac{1}{r} m a^r \dot{\theta}^r \quad \text{و} \quad v = \frac{1}{r} \left(\frac{K}{r} \right) (b \dot{\theta})^r = \frac{1}{r} K b^r \dot{\theta}^r$$

$$C_{\text{eff}} \dot{q}^r = C a^r \dot{\theta}^r + C b^r \dot{\theta}^r = C (a^r + b^r) \dot{\theta}^r$$

$$\text{ما با جایگذاری در رابطه } (*) \text{ داریم: } m a^r \ddot{\theta} \dot{\theta} + \frac{1}{r} K b^r \dot{\theta} \dot{\theta} + C (a^r + b^r) \dot{\theta}^r = 0 \Rightarrow m a^r \ddot{\theta} + C (a^r + b^r) \dot{\theta} + \frac{1}{r} K b^r \theta = 0$$

$$m_{\text{eff}} = m a^r, \quad K_{\text{eff}} = \frac{1}{r} K b^r \Rightarrow \omega_d = \sqrt{\frac{K}{r m} \left(\frac{b}{a} \right)^r - \left(\frac{C}{r m} \right)^r \left(\frac{a^r + b^r}{a^r} \right)}$$

$$C_{\text{eff}} = a^r + b^r$$

۵۱ - گزینه «۳»

در سیستم فوق ابتدا جرم M به یک فنر متصل است، در نتیجه چه در حرکت به سمت چپ و چه در حرکت به سمت راست باید نمودار نیرو-تغییر مکان دارای شیب k باشد بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند.

از طرفی زمانی که سیستم به سمت راست حرکت می‌کند به یک فنر دیگر می‌رسد که با فنر اول موازی است بنابراین فنریت کل افزایش می‌یابد و در نتیجه شیب منحنی نیز باید افزایش پیدا کند.

از طرف دیگر زمانی که سیستم به سمت چپ حرکت می‌کند نیز به یک فنر دیگر برخورد می‌کند که با فنر اول موازی است و این باعث افزایش فنریت کل می‌شود و در نتیجه باز هم باید شیب منحنی افزایش پیدا کند.

۵۲ - گزینه «۱»

$$DOF = 3(n-1) - 2f_1 - f_2$$

$$n = 8$$

$$f_1 = 9$$

$$f_2 = 1$$

$$DOF = 3(8-1) - 2 \times 9 - 1 = 21 - 18 - 1 = 2$$

با رابطه محاسبه درجه آزادی

درجه آزادی مکانیزم مشخص می‌شود.

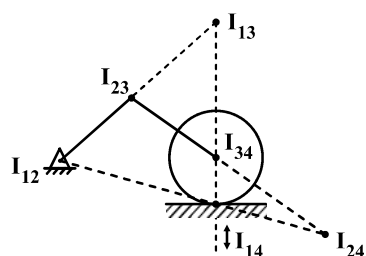
تعداد عضوهای مکانیزم ۸ تا است ←

تعداد قیدهای f_1 مکانیزم

تعداد قیدهای f_2 مکانیزم

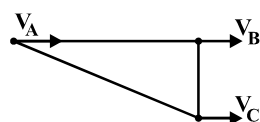
پس درجات آزادی ۲ است.

۵۳- گزینه «۴»



مرکز آنی دوران I_{13} از محل برخورد و امتداد مراکز دوران I_{12} و I_{23} — I_{14} و I_{34} بدست می‌آید که همان‌طور که ملاحظه می‌شود نقطه A است.

۵۴- گزینه «۳»

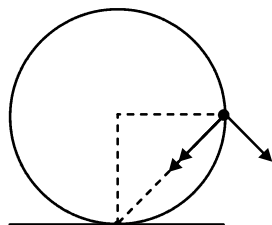


با توجه به وضعیت فعلی مکانیزم سرعت تمام نقاط A ، B و C یکی است در نتیجه با مشخص بودن سرعت در نقطه A یعنی V ، سرعت نقاط B و C نیز V خواهد بود.

۵۵- گزینه «۳»

$$= R\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = 12\sqrt{(\sqrt{5})^4 + 5^2} = 12\sqrt{50} = 12\sqrt{25 \times 2} = 60\sqrt{2}$$

و با توجه به شکل روبرو، جهت بردار شتاب نسبی به شکل III نزدیک‌تر است.



۵۶ - گزینه «۴»

برای خطای حالت ماندگار می‌دانیم که:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} SE(S) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{SR(S)}{1+GH}$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S \times \frac{1}{S^2}}{1 + \frac{K}{S(S+1)(S+2)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(S+1)(S+2)}{S(S+1)(S+2) + K} = \frac{2}{K}$$

حال باید پایداری سیستم فوق را بررسی کنیم زیرا زمانی، خطای حالت ماندگار برای سیستم تعریف می‌شود که سیستم پایدار باشد و برای حالت نوسانی و یا ناپایدار خطای حالت ماندگار نداریم:

$$\frac{2}{K} = \frac{1}{4} \Rightarrow K = 8$$

$$1 + GH = 0 \Rightarrow S^3 + 3S^2 + 2S + K = 0$$

معیار روث:

S^3	۱	۲
S^2	۳	K
S^1	$\frac{6-K}{3}$	۰
S^0	K	

$$\Rightarrow 0 < K < 6$$

می‌بینیم که K بدست آمده در این محدوده قرار ندارد یعنی به ازای $K = 8$ سیستم ناپایدار است و خطای حالت ماندگار نداریم.

۵۷ - گزینه «۲»

ابتدا معادله مشخصه را پیدا می‌کنیم:

$$1 + \frac{48}{S(S+K)(S+4)} = 0 \Rightarrow S(S+K)(S+4) + 48 = 0$$

$$S^3 + (K+4)S^2 + 4KS + 48 = 0$$

S^3	۱	$+4K$
S^2	$K+4$	$+48$
S^1	$\frac{16K+4K^2-48}{K+4}$	۰
S^0	$+48$	

$$\Rightarrow 0 < K < 6 \Rightarrow K > -4 \Rightarrow 16K + 4K^2 - 48 > 0$$

$$\Rightarrow (K^2 + 4K - 12) > 0 \Rightarrow (K+6)(K-2) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{+} \quad \frac{2}{-} \Rightarrow \frac{K < -6}{K > 2} \Rightarrow K < -6, K > 2$$

اشتراک K بالا و پایین:

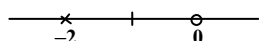
۵۸ - گزینه «۴»

برای پیدا کردن مکان هندسی ریشه‌ها باید ابتدا تابع تبدیل حلقه باز را پیدا کنیم. از طرفی باید توجه نمود که مکان هندسی ریشه‌ها بر حسب تغییرات α خواسته شده است لذا ابتدا باید تابع تبدیل حلقه باز جدید را بر حسب تغییرات α مرتب کنیم. معادله مشخصه:

$$1 + GH = 0 \Rightarrow S^2 + SK + 4S + 4 = 0 \Rightarrow 1 + \frac{KS}{S^2 + 4S + 4} = 0$$

$$GH = \frac{KS}{S^2 + 4S + 4} \Rightarrow \begin{cases} S = 0 & \text{صفر} \\ S = -2 & \text{قطب مضاعف} \end{cases}$$

پیدا کردن مکان هندسی روی محور حقیقی با استفاده از شرط فاز



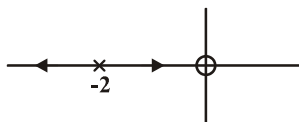
چون -2 ریشه مضاعف است سمت چپ آن نیز جزء مکان هندسی ریشه‌هاست.

محل تلاقی مجانب با محور حقیقی و زاویه مجانب :

$$\sigma = \frac{-2 - 2 - 0}{2 - 1} = -4 \quad \text{زاویه مجانب و} \quad \frac{\pm(2h+1)180^\circ}{2-1} = \pm(2h+1)180^\circ$$

مسیر همواره از قطب به سمت صفر یا از قطب به سمت مجانب است.

بنابراین شکل مکان هندسی به صورت زیر است.



۵۹ - گزینه «۲»

معادله مشخصه سیستم فوق عبارتست از:

$$1 + GH = 0 \Rightarrow 1 - \frac{K_1(K_2S - 2)}{(S+1)(S+2)(S+3)} = 0 \Rightarrow (S+1)(S+2)(S+3) - K_1(K_2S - 2) = 0$$

$$\Rightarrow S^3 + 6S^2 + 11S + 6 - K_1K_2S + 2K_1 = 0$$

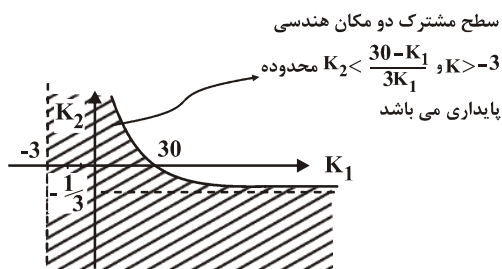
$$S^3 + 6S^2 + S(11 - K_1K_2) + 6 + 2K_1 = 0 \Rightarrow \text{با استفاده از معیار پایدار راث داریم}$$

S^r	۱	$۱۱ - K_1 K_r$
S^r	۶	$۶ + ۲K_1$
S^1	$\frac{1}{6}(۶۶ - ۶k_1 k_r - ۶ - ۲k_1)$	
S^0	$۶ + ۲k_1$	

$$(۱) \quad ۶۰ - ۶K_1 K_r - ۲K_1 > ۰ \Rightarrow ۳۰ - K_1 > ۲K_1 K_r \Rightarrow K_r < \frac{۳۰ - K_1}{۲K_1}$$

$$(۲) \quad ۶ + ۲K_1 > ۰ \Rightarrow K_1 > -۳$$

اگر نمودار $K_r = \frac{۳۰ - K_1}{۲K_1}$ و $K_1 = -۳$ را بکشیم:



۶۰- گزینه «۳»

برای بررسی پایداری ابتدا باید معادله مشخصه سیستم را پیدا کنیم:

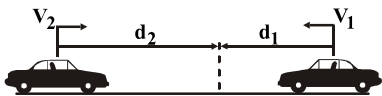
$$۱ + GH = ۰ \Rightarrow ۱ + \frac{K(aS + ۱)}{S^r(bS + ۲)} = ۰ \Rightarrow bs^r + ۲s^r + aKS + K = ۰ \rightarrow \text{بررسی پایداری از طریق معیار راوث}$$

S^r	b	aK
S^r	۲	K
S^1	$\frac{K}{۲}(b - ۲a)$	۰
S^0	K	

$$\Rightarrow K(b - ۲a) > ۰, K > ۰ \Rightarrow b - ۲a > ۰ \Rightarrow b > ۲a$$

۶۱ - گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} \circ -V_1^r &= -ra d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{V_1^r}{ra} \\ \circ -V_r^r &= -ra d_r \Rightarrow d_r = \frac{V_r^r}{ra} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = d_1 + d_r = \frac{V_1^r}{ra} + \frac{V_r^r}{ra} = \frac{V_1^r + V_r^r}{ra}$$



راه حل اشتباه:

$$\begin{aligned} \circ - (V_1 + V_r)^r &= -r(ra)d \\ \Rightarrow d &= \frac{(V_1 + V_r)^r}{ra} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 + V_r = \text{سرعت نسبی} \\ ra = \text{شتاب نسبی} \end{cases}$$

۶۲- گزینه «۳»

بیشترین برد برای پرتابه با سرعت اولیه V_0 در زاویه $\theta = 45^\circ$ رخ می‌دهد معادله پرتابه در این وضعیت برابر است با:

$$y = -\frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta = -\frac{gx^2}{V_0^2} + x$$

$$h = -\frac{gx^2}{V_0^2} + x \Rightarrow x^2 - \frac{V_0^2}{g}x + \frac{V_0^2 h}{g} = 0 \Rightarrow x \text{ حل یک معادله درجه دو با مجهول } x$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{V_0^2}{g} - \sqrt{\frac{V_0^4}{g^2} - 4 \frac{V_0^2 h}{g}} \right) \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{V_0^2}{g} + \sqrt{\frac{V_0^4}{g^2} - 4 \frac{V_0^2 h}{g}} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = x_2 - x_1 = \frac{V_0}{g} \sqrt{V_0^2 - 4gh}$$

۶۳- گزینه «۱»

روش اول:

نکته: نسبت‌های مثلثاتی روبرو را به خاطر بسپارید:

$$[\Delta - 12 - 13], [3 - 4 - 5] \\ \Rightarrow OA = 120 \text{ mm}, \quad OC = 90 \text{ mm}$$

نکته: در یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه متغیر خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = L^2 \Rightarrow 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2L\dot{L}$$

چون طول AB و AC ثابت است لذا خواهیم داشت: ($\dot{L} = 0$)

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$$

$$\begin{cases} \overline{OB} \times \frac{d}{dt}(\overline{OB}) + \overline{OA} \times \frac{d}{dt}(\overline{OA}) = 0 \\ \overline{OC} \times \frac{d}{dt}(\overline{OC}) + \overline{OA} \times \frac{d}{dt}(\overline{OA}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 \times \frac{d}{dt}(\overline{OB}) + 120 \times V_A = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\overline{OB}) = -\frac{120}{50} V_A (1) \\ 90 \times \frac{d}{dt}(\overline{OC}) + 120 \times V_A = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\overline{OC}) = -\frac{120}{90} V_A (2) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(\overline{OB}) + \frac{d}{dt}(\overline{OC}) = \frac{d}{dt}(\overline{OB} + \overline{OC}) = \frac{d}{dt}(S) = 2000 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} (1), (2), (3) \Rightarrow V_A = \frac{15}{28} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

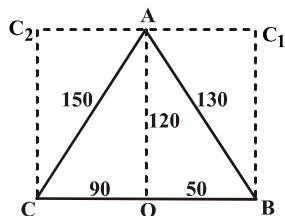
لازم است دو معادله (۱), (۲) را با هم جمع کرده و از اطلاعات رابطه (۳) استفاده کنید.

روش دوم:

نقطه C_1 مرکز آنی دوران عضو AB و نقطه C_2 مرکز آنی دوران عضو AC می باشد.

سرعت نقطه A در هر دو عضو AC, AB برابر است لذا:

$$\overline{AC_2} \cdot \omega_2 = \overline{AC_1} \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{9}{5} \omega_2 \quad (1)$$



همچنین مجموع سرعت نقطه B و نقطه C برابر است با $\dot{S} = 2 \frac{m}{s}$

$$\Rightarrow \overline{BC_1} \cdot \omega_1 + \overline{CC_2} \cdot \omega_2 = \dot{S} \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = \frac{5}{3} \quad (2)$$

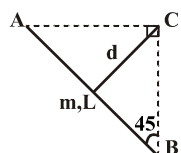
$$(1), (2) \Rightarrow \omega_2 = \frac{125}{21} \frac{\text{rad}}{s}, \omega_1 = \frac{75}{7} \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{9}{100} \omega_2 = \frac{5}{100} \omega_1 = \frac{15}{28} \frac{m}{s}$$

۶۴- گزینه «۴»

نقطه C مرکز آنی دوران میله AB است، لذا می توان نوشت:

$$\sum M_C = I_C \ddot{\theta}$$



$$I_C = I_G + m\bar{d}^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

$$\Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos 45^\circ = I_C \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{2}g}{4L}$$

* در محاسبه اینرسی خارج از مرکز جرم میله دقت شود که $\bar{d} = \frac{L}{2}$ (قضیه محورها موازی)

$$a_x = -R\omega^2 \cos \theta \Rightarrow a_r = -R\omega^2 \cos^2 \theta, a_\theta = -a_x \sin \theta = R\omega^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -N + mg \sin \theta = -mR\omega^2 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow N = mg \sin \theta + mR\omega^2 \cos^2 \theta$$

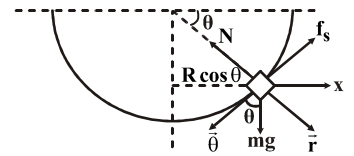
$$f_s = \mu N = \mu(mg \sin \theta + mR\omega^2 \cos^2 \theta) \quad (۱)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow mg \cos \theta - f_s = mR\omega^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\Rightarrow f_s = -mR\omega^2 \cos \theta + mg \cos \theta \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow mg\mu \sin \theta + mR\mu\omega^2 \cos^2 \theta = mg \cos \theta - mR \cos \theta \sin \theta \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\cos \theta - \mu \sin \theta}{\mu \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta} \cdot \frac{g}{R}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1 - \mu \tan \theta}{\mu \cos \theta + \sin \theta} \cdot \frac{g}{R}}$$

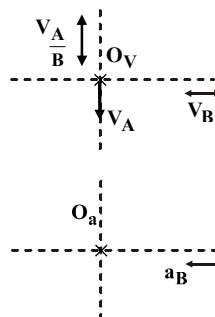


$$\begin{matrix} \checkmark\checkmark & -\checkmark & -\checkmark \\ V_A = V_B + V_A \\ B \end{matrix}$$

ابتدا سیستم را از لحاظ سرعت تحلیل می‌کنیم:

سرعت V_B در راستای افقی است و سرعت \vec{V}_A در راستای عمودی است چرا که باید عمود بر راستای AB باشد، لذا با توجه به دیاگرام سرعت

$$\omega_{OB} = 0, \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{L} \Leftarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B, \quad \vec{V}_B = 0$$

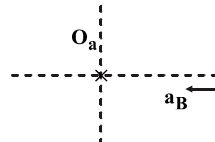


باید گفت:

$$\begin{matrix} \checkmark\checkmark & -\checkmark & -\checkmark \\ a_A = a_B + a_A \\ B \end{matrix}$$

حال باید سیستم را از لحاظ شتاب تحلیل کنیم:

$$\vec{a}_B = \vec{O_B} \cdot (\omega_{OB})^2 \uparrow + O_B \cdot \alpha_{OB} \leftrightarrow = r \cdot \alpha_{OB} \leftrightarrow$$



شتاب نقطه A صفر می‌باشد. (سرعت ثابت دارد).

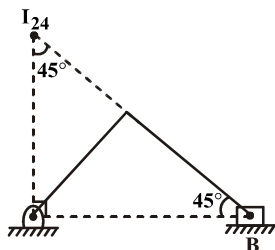
$$\vec{a}_A = AB \cdot (\omega_{AB})^2 \leftrightarrow + AB \cdot \alpha_{AB} \uparrow$$

دوباره با توجه به دیاگرام شتاب و تساوی شتاب در راستای x, y خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x: r\alpha_{OB} = AB \cdot (\omega_{AB})^2 \Rightarrow \alpha_{OB} = \frac{L\omega_{AB}^2}{r} = \frac{\vec{V}_A^2}{rL} \\ y: AB \cdot \alpha_{AB} = 0 \Rightarrow \alpha_{AB} = 0 \end{cases}$$

۶۷- گزینه «۳»

مرکز آنی دوران $I_{۲۴}$ در شکل مشخص شده است.



$$I_{۲۴} \hat{O}_2 B = 90^\circ \Rightarrow O_2 \hat{I}_{۲۴} B = 45^\circ \Rightarrow \overline{O_2 I_{۲۴}} = \overline{O_2 B} = 0.4 \text{ m}$$

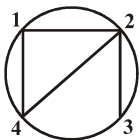
$$\vec{V}_B = \vec{V}_{I_{۲۴}} = \overline{O_2 I_{۲۴}} \times \omega_2 = 0.4 \times 5 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

دقت شود که لغزنده ۴ حرکت انتقالی دارد و سرعتش برابر است با: $\vec{V}_4 = \vec{V}_{I_{۲۴}}$

* دقت شود که مثلث $O_2 B I_{۲۴}$ یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است، چرا که $I_{۲۴}$ در راستای قائم نقطه O_2 می باشد.

۶۸- گزینه «۴»

طبق قضیه کندی: $I_{۳۴}$ باید در امتداد $I_{۲۴}, I_{۳۲}$ باشد.



* $I_{۲۴}$: چون عضو ۴ روی عضو ۲ می لغزد و این لغزش، مستقیم الخط است. پس مرکز آنی $I_{۲۴}$ روی خط قائم بر عضو ۴ و در بی نهایت است (عمود بر BG در راستای C)

* $I_{۳۲}$: همان نقطه A می باشد، چرا که نقطه A متعلق به هر دو عضو ۲ و ۳ است و فقط این نقطه A می باشد که متعلق به هر دو جسم است و سرعت یکسان برای هر دو عضو دارد.

۶۹- گزینه «۲»

$$\text{DOF} = 3(n-1) - 2f_1 - f_2 = 3 \times (4-1) - 2 \times 10 = 1$$

$$n = 4$$

$$f_1 = 10$$

$$f_2 = 0$$

نکته: یک مکانیزم مثلثی تشکیل شده از سه لینک را می توان در کل یک عضو صلب در نظر گرفت.



* دقت شود که میله قائم در سمت چپ شکل را می توان با زمین یکسان دانست.

۷۰- گزینه «۴»

$$DOF = 3(n-1) - 2f_1 - f_2 = 3 \times (10-1) - 2 \times 12 - 0 = 3$$

$$n = 10$$

$$f_1 = 12$$

$$f_2 = 0$$

* به یاد داشته باشید برای تعیین درجه آزادی مکانیزم، می‌توان حرکت سیستم را با یک ورودی تصور کرد.

۷۱- گزینه «۱»

$$\omega = 2\pi f \quad (f: \text{فرکانس})$$

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin \omega t \\ v &= A\omega \cos \omega t \\ a &= -A\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_a = -\omega^2 x \Rightarrow A = \left| \frac{a_{\max}}{-4\pi^2 f^2} \right| = \left| \frac{5 \times 9/81}{-4\pi^2 \times 8^2} \right| = \quad / \quad 1849$$

$$V_{\max} = A\omega \Rightarrow V_{\max} = A(2\pi f) = 0/952$$

نکته ۱: با توجه به این که گزینه‌ها در هر دو عدد مورد نظر با هم تفاوت دارند، دانشجو می‌تواند با بدست آوردن یکی از اعداد جواب صحیح را انتخاب نماید.

نکته ۲: دانشجو باید دقت داشته باشد که گزینه‌ها در دقم قبل از اعشار و یا حداکثر یک رقم بعد از اعشار با هم تفاوت دارند پس نیاز نیست که عملیات ریاضی را کامل انجام دهد و جواب تا یک رقم اعشار کفایت می‌کند.

۷۲- گزینه «۲»

معادلات دینامیکی دو جسم را می‌نویسیم: (T کشش طناب است)

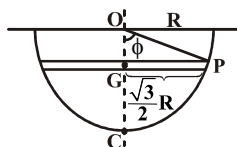
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + 2T \\ m\ddot{y} = -T \\ 2\ddot{x} = \ddot{y} \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx + 2(-m(2\ddot{x})) \Rightarrow 5m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{5m}}$$

* دقت شود که نیروی وزن جرم m آویزان با نیروهای فنر خنثی می‌شود و نیروی وزن در دیاگرام آزاد جسم در نظر گرفته نمی‌شود.

* مهم‌ترین قسمت حل یک مسئله ارتعاشاتی نوشتن معادلات دینامیکی سیستم به طور دقیق است.

۷۳- گزینه «۳»

با توجه به هندسه مسئله داریم:



$$\begin{cases} OP = R \\ GP = \frac{\sqrt{3}}{2} R \end{cases} \Rightarrow \sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow GC = R(1 - \cos \phi) = \frac{R}{2}$$

چون نقطه C مرکز آنی دوران است لذا می توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} m (\sqrt{r} R)^2 + m \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2 = \frac{m R^2}{4} \dot{\theta}^2$$

$$V = mg \frac{R}{2} (1 - \cos \theta) \approx mg \frac{R}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) = mg \frac{R}{4} \theta^2$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{V_{\max}}{T_{\max}}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

* برای یافتن فرکانس طبیعی سیستم یک درجه آزادی، ۴ روش وجود دارد: ۱- قانون دوم نیوتن ۲- معادله اولر ۳- روش انرژی ۴- روش رویلی

۷۴- گزینه «۲»

نکته: ماکزیمم مقدار دامنه نوسانات خروج از مرکز در فرکانس $\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}} > 1$ رخ می دهد و مقدار آن برابر است با:

$$\frac{MX}{me} = \frac{1}{2\xi} \quad \text{هم چنین در فرکانس تشدید } \omega = \omega_n \quad \frac{MX_{\max}}{me} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{MX_{\text{res}}}{me} = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow X_{\text{res}} = 1 \text{ mm} \Rightarrow \frac{me}{M} = 1$$

$$X_{\max} = \frac{me}{M} \cdot \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ mm}$$

* حتماً نمودارهای ارتعاشات اجباری را به خاطر بسپارید

۷۵- گزینه «۳»

از روش اوایلر معادلات دینامیکی سیستم را می نویسیم:

$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow (-C \frac{L}{2} \dot{\theta}) \frac{L}{2} + (-k (\frac{L}{2} \theta - y)) \frac{L}{2} = \frac{m L^2}{12} \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{m L^2}{12} \ddot{\theta} + C \frac{L^2}{4} \dot{\theta} + k \frac{L^2}{4} \theta = +k \frac{L}{2} Y \sin \omega t \Rightarrow \frac{m L}{12} \ddot{\theta} + \frac{C L}{4} \dot{\theta} + \frac{k L}{4} \theta = \frac{k}{2} Y \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{\frac{k}{2} Y}{\sqrt{(k \frac{L}{4} - \frac{m \omega^2 L}{12})^2 + (\frac{C L \omega}{4})^2}} = \frac{2 k Y}{L \sqrt{(k - \frac{m \omega^2}{3})^2 + (C \omega)^2}}$$

نکته: تعداد دفعات استفاده از معادله کمکی برابر است با تعداد جفت ریشه متقارن نسبت به مبدأ.

s^8	۱	۵	۹	۷	۲	
s^7	۳	۹	۹	۳	۰	
s^6	۲	۶	۶	۲		
s^5	۰	۰	۰	۰		
s^4						
s^3						
s^2						
s^1						
s^0						

$$s^6 + 3s^4 + 3s^2 + s^0 = 0$$

$$\Rightarrow s^6 + 3s^4 + 3s^2 + 1 = 0 \quad (\text{معادله کمکی})$$

$$\Rightarrow (s^2 + 1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow s = \pm j\omega, \pm j\omega, \pm j\omega$$

در نتیجه اگر جدول را کامل کنیم در کل باید سه مرتبه از معادله کمکی استفاده کرد.

در نتیجه باید سه مرتبه از معادله کمکی استفاده کرد و نیازی به کامل کردن جدول راث نیست.

* اگر سطر s^5 را از معادله کمکی به دست آوریم، برای کامل کردن جدول راث بعد از دو مرتبه دیگر، یک سطر از جدول کاملاً صفر می‌شود، پس سه جفت ریشه متقارن نسبت به مبدأ داریم.

نکته: برای رسم مکان هندسی، حتماً تبدیل حلقه باز باید بررسی شود و شکل معادله آن باید به فرم معمول $1 + kG(s)H(s) = 0$ باشد که در آن k می‌تواند بین $-\infty < k < \infty$ یا $0 < k < \infty$ تغییر کند که در این سؤال مقدار a می‌تواند تغییر کند. لذا ابتدا معادله را به فرم معمول می‌نویسیم: ($k \approx a$)

$$1 + aG(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{4(s^2 + 3)}{2s(s + a)} = 0 \Rightarrow \text{معادله مشخصه: } 2s(s + a) + 4(s^2 + 3) = 0$$

$$\Rightarrow 6s^2 + 2as + 12 = 0 \Rightarrow 1 + aG(s)H(s) = 1 + \frac{2as}{6s^2 + 12} = 0$$

$$\text{تابع تبدیل حلقه باز} = \frac{s}{3s^2 + 6} \Rightarrow \begin{cases} \text{قطب‌ها} = \pm\sqrt{2}j \\ \text{صفرها} = \text{صفر} \end{cases}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow \text{نقطه شکست} \Rightarrow s = \pm\sqrt{2}$$

تنها گزینه (۳) مشخصات بالا را دارد.

۷۸- گزینه «۲»

به ازای همه مقادیر k خطای ماندگار صفر می‌باشد:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(ks+1)}{1+s(s+2)(s+3)} = 0$$

$$\text{تابع تبدیل حلقه بسته} = \frac{\frac{ks+1}{s(s+2)(s+3)}}{1+\frac{ks+1}{s(s+2)(s+3)}} = \frac{ks+1}{s(s+2)(s+3)+ks+1}$$

اما حتملاً پایداری سیستم نیز بررسی شود:

$$\text{معادله مشخصه} = s(s+2)(s+3)+ks+1 = s^3 + 5s^2 + (6+k)s + 1$$

حال جدول را - هروتیس را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 6+k \\ s^2 & 5 & 1 \\ s^1 & \frac{5(6+k)-1}{5} & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array} \Rightarrow \frac{5(6+k)-1}{5} > 0 \Rightarrow k > -\frac{29}{5}$$

۷۹- گزینه «۴»

$$G(s) = \frac{2}{s+2} \Rightarrow \text{تابع تبدیل مرتبه اول} \Rightarrow G(s) = \frac{A}{\tau_1 s + 1} = \frac{1}{\frac{s}{2} + 1} \Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{2}$$

$$\tau = \text{ثابت زمانی و } A \text{ یک ضریب ثابت است. } (G(s) \text{ تابع تبدیل کلی سیستم است}) \Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

$$\text{از روی نمودار بلوکی} \Rightarrow G(s) = \frac{\frac{2k}{s+2}}{1+\frac{2k}{s+2}} = \frac{2k}{s+2+2k} = \frac{\frac{2k}{2+2k}}{\frac{s}{2+2k} + 1}$$

برای این که سیستم سریع تر شود می‌بایست پاسخ زمانی آن کوچکتر شود.

$$\Rightarrow \frac{1}{2+2k} = \frac{1}{20} \Rightarrow k = 9$$

در ضمن این سیستم پایدار است.

$$* \text{ فرم کلی تابع تبدیل یک سیستم مرتبه اول: } G(s) = \frac{A}{\tau s + 1}$$

τ : ثابت زمانی می‌باشد که هرچه کوچکتر باشد سیستم سریع تر است و پاسخ زمانی کوچکتری دارد.

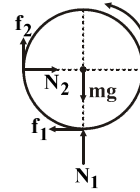
$$\begin{aligned}
 P_1 &= H_1 H_2 H_3 H_4 & \Delta_1 &= 1 & L_1 &= -H_1 \\
 P_2 &= H_1 & \Delta_2 &= 1 + H_3 & L_2 &= -H_2 \\
 P_3 &= H_2 H_4 \times (+1) & \Delta_3 &= 1 + H_1 & L_3 &= -H_3 \\
 P_4 &= (+1) \times (-1) \times (+1) & \Delta_4 &= +1 & & \\
 \Delta &= 1 + H_1 + H_2 + H_3 + H_1 H_2
 \end{aligned}$$

دقت شود که دو حلقه L_1, L_2 با هم تلاقی ندارند.

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

۸۱- گزینه «۲»

نیروهایی که بر کره وارد می‌شوند در شکل مشخص شده‌اند:



$$\begin{cases} N_2 - f_1 = 0 & \text{راستای افقی} \\ N_1 + f_2 = mg & \text{راستای عمودی} \end{cases}$$

برای نیروهای اصطکاک

$$\begin{cases} f_1 = \mu N_1 \\ f_2 = \mu N_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_1 = \mu(mg - f_2) = \mu(mg - \mu N_2) = \mu(mg - \mu f_1) = \mu mg - \mu^2 f_1 \Rightarrow \mu mg = (1 + \mu^2) f_1$$

$$\Rightarrow f_2 = \mu f_1 = \frac{\mu^2 mg}{1 + \mu^2}$$

گشتاور حول مرکز چرخش تنها ناشی از نیروهای اصطکاک است.

$$\tau = (f_1 + f_2)R = I\alpha = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \mu^2}{1 + \mu^2}\right) \mu g}{R} \Rightarrow \omega_0 - \alpha t = 0 \Rightarrow t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \mu^2}{1 + \mu^2}\right) \mu g} R \omega_0$$

* در کشیدن دیالگرام نیرویی دقت کنید، جهت نیروی اصطکاک در خلاف جهت گردش می‌باشد.

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

۸۲- گزینه «۳»

$$I_G = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}pL^2$$

فاصله از محور چرخش را با X نشان می‌دهیم.

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= xdf \\ df &= \mu(dm)g \\ dm &= p dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau = \int_0^{\frac{L}{2}} x \mu p g dx = \frac{p \mu g L^2}{4}$$

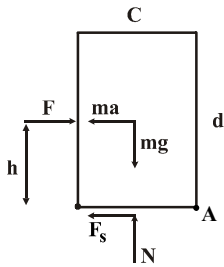
دقت شود که ضریب ۲ انتگرال به خاطر این است که نیروی اصطکاک به هردو نیمه میله وارد می‌شود.

$$\Rightarrow \tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu g}{L}$$

$$\Rightarrow \omega_0 - \alpha t = 0 \Rightarrow t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 L}{2\mu g}$$

۸۳- گزینه «۱»

باید دیاگرام نیرویی جعبه را رسم کرد و معادلات تعادل دینامیکی را نوشت: دقت کنید که نیروی اصطکاکی را فراموش نکنید و در آستانه واژگون شدن باید حول نقطه A تعادل گشتاورهای وارد به جسم برقرار باشد.



$$\sum F_y = ma_y = 0 \Rightarrow mg = N \Rightarrow F_s = \mu N = \mu mg \quad (1)$$

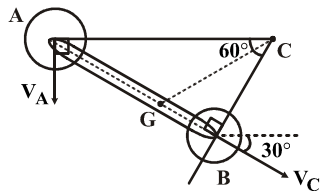
* همچنین از اصل دالامبر نیز باید استفاده کرد (قرار دادن a_x در خلاف جهت)

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F - F_s - ma_x = 0 \Rightarrow a = \frac{F - \mu mg}{m} \quad (2)$$

* در آستانه واژگون شدن $\alpha = 0$ و نیروی عکس العمل زمین به نقطه A منتقل می شود.

$$\begin{aligned} \sum M_A = I_A \cdot \alpha = 0 &\Rightarrow Fh + mg \frac{c}{2} = ma \frac{d}{2} \Rightarrow h = \frac{ma \frac{d}{2} - mg \frac{c}{2}}{F} \\ \Rightarrow h &= \frac{m(\frac{F - \mu mg}{m}) \frac{d}{2} - mg \frac{c}{2}}{F} = \frac{d}{2} - \frac{\mu mgd}{2F} - \frac{mgc}{2F} \end{aligned}$$

۸۴- گزینه «۳»



نکته: از آن جا که سرعت هر نقطه از جسم صلب بر شعاع چرخش آن نقطه عمود است. برای مشخص کردن مرکز آنی دوران، پس از خارج کردن خط عمود بر راستای سرعت دو نقطه از جسم، راستای آن دو خط عمود را به هم وصل می کنیم تا مرکز آنی دوران مشخص شود با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} AB = L \\ \frac{AB}{AC} = \sin 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{2L}{\sqrt{3}} \\ \frac{BC}{AB} = \tan 30^\circ \Rightarrow BC = AB \tan 30^\circ = \frac{L}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} mg\Delta h = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \Rightarrow m \times g \times \frac{3L}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} mL^2 \times \omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \Delta h = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \sin 30^\circ = \frac{3L}{4} \\ I_C = I_G + m(\overline{CG})^2 = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{3}{12} mL^2 = \frac{2}{3} mL^2 \\ \overline{CG}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{BC}^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{3} = \frac{7L^2}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_B = \overline{BC} \cdot \omega = \frac{L}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{\sqrt{3}gL}{2}$$

* مماس اینرسی را باید حول نقطه مرکز آنی دوران در نظر گرفت.
* در محاسبه انرژی پتانسیل و جابه جایی مرکز جرم دقت شود.

۸۵- گزینه «۲»

شتاب مرکز جرم میله

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow a_G = \frac{F}{m}$$

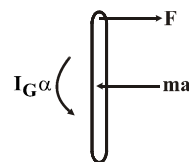
$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{a}_{\frac{A}{G}} = \frac{F}{m} + \frac{L}{r} \alpha + \frac{L}{r} \omega^2 = \frac{F}{m} + \frac{L}{r} \left(\frac{6F}{Lm} \right) = \frac{7F}{m}$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \Rightarrow F \frac{L}{r} = \frac{1}{12} mL^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{6F}{Lm}$$

$$\Rightarrow a_A = \frac{70}{3} \frac{m}{s^2}, \quad \alpha = 10 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

طبق اصل دالامبر نیروی $-ma$ و گشتاور $-I\alpha$ به جسم وارد می‌شود و جسم در حالت تعادل استاتیکی قرار می‌گیرد.

در لحظه اولیه اعمال نیرو $\omega = 0$



۸۶- گزینه «۳»

ضریب تغییرات سرعت در چرخ لنگر: (برای محاسبه انرژی جنبشی)

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\bar{\omega}} \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = \frac{2(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{\omega_{\max} + \omega_{\min}}$$

۸۷- گزینه «۲»

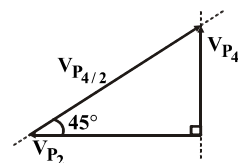
سیستم را تحلیل سینماتیکی می‌کنیم:

* دقت شود که $\frac{V_{P_f}}{P_f}$ مماس بر منحنی گام بادامک است.

$$\vec{V}_{P_f} = \vec{V}_{P_r} + \vec{V}_{\frac{P_f}{P_r}}$$

$$V_{P_r} = \omega_r P \times \omega_r = 50 \text{ cm} \times 100 \times \frac{\pi}{60} = \frac{\Delta \pi}{3} \frac{m}{s}$$

$$\theta = 45^\circ \Rightarrow |V_{P_r}| = |V_{P_f}| = \frac{\Delta \pi}{3} \frac{m}{s}$$

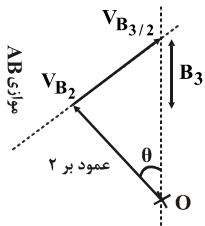


۸۸- گزینه «۲»

* ابتدا سیستم را تحلیل سینماتیکی می‌کنیم: (تحلیل سرعت و شتاب)

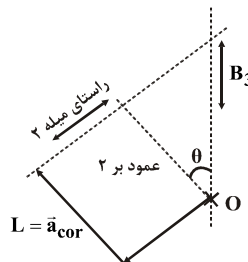
V_{B_2} : عمود بر راستای میله AB

V_{B_2} : در راستای میله ۲ می‌باشد (در راستای شیار میله ۲)



$$\Rightarrow |V_{B_2}| = \frac{|V_{B_3}|}{\cos \theta} \Rightarrow V_{B_2} = V_{B_3} \cdot \tan \theta$$

با توجه به شکل خواهیم داشت:



$$a_{B_2} = a_{B_2} + a_{B_2} = a_{B_2} + a_{rel} + r\omega \times \vec{V}_{B_2}$$

راستای شتاب B_2 در راستای شیار یعنی \uparrow می‌باشد راستای شتاب نسبی a_{rel} در راستای شیار میله ۲ می‌باشد.

(a_{cor}) راستای شتاب کریولیس: راستای سرعت V_{B_2} را در جهت گردش ω باید 90° درجه چرخاند راستای شتاب B_2 به سمت نقطه A در راستای میله AB می‌باشد با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$|a_{cor}| = r\omega \cdot V_{B_2} = r\omega \cdot V_{B_3} \cdot \tan \theta \Rightarrow |a_{B_2}| = \frac{|a_{cor}|}{\cos \theta} = \frac{r\omega V_{B_3} \tan \theta}{\cos \theta}$$

و در نهایت:

$$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{سرعت}} = \frac{ma_{B_2}}{V_{B_2}} = \frac{r\omega V_{B_3} \frac{\tan \theta}{\cos \theta}}{\frac{V_{B_3}}{\cos \theta}} = r\omega \tan \theta$$

۸۹- گزینه «۴»

یکی از معروفترین بادامک‌ها و پیروها، بادامک دایره‌ای خارج از مرکز است که در آن جابه‌جایی پیرو یک حرکت سینوسی است.

$$y = e(1 - \cos \theta) \Rightarrow \dot{y} = e\omega \sin \theta \Rightarrow \ddot{y} = +e\omega^2 \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

* دقت شود که معادله سرعت و شتاب برای هر دو پیرو یکسان می‌باشد.

۹۰- گزینه «۲»

روش تستی: با توجه به شکل مشخص است که حداکثر و حداقل جواب در کجا اتفاق می افتد.

$$\bar{T} = \frac{\int T d\theta}{\int d\theta} = \frac{300 \times (90 - 0) - 200(180 - 90) + 400(360 - 180) - 300(450 - 360) + 200(540 - 450)}{720} = 87/5$$

$$E_{OA} = I \int \omega d\omega = \int (T - \bar{T}) d\theta = (300 - 43/75) \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \approx 334$$

$$E_{AB} = -(200 + 87/5) \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \approx -451$$

$$E_{BC} = -(400 + 87/5) (2\pi - \pi) \approx 1902$$

$$E_{CD} = -(300 - 87/5) \left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi \right) \approx -608/6$$

$$E_{DE} = (200 - 87/5) \left(3\pi - \frac{5\pi}{2} \right) \approx 177/6$$

$$E_{EF} = -(400 - 87/5) \left(\frac{7\pi}{2} - 3\pi \right) \approx -764/8$$

$$E_{FG} = (300 - 87/5) \left(4\pi - \frac{7\pi}{2} \right) \approx 233/8$$

$$E_{\max} = -334 - 451 + 1902 \approx 1117 \Rightarrow \theta_{\max} = 360^\circ$$

$$E_{\min} = 334 - 451 + 1902 - 608/6 + 177/6 - 764/8 \approx -466/8 \Rightarrow \theta_{\min} = 630^\circ$$

۹۱- گزینه «۱»

می دانیم که معادله حرکت یک سیستم دینامیکی یک درجه آزادی با تحریک پایه به صورت زیر می باشد:

($x =$ جابه جایی جسم و $y =$ جابه جایی پایه)

$$m\ddot{x} + kx = ky(t) \Rightarrow z = x - y \Rightarrow m\ddot{z} + kz = -m\ddot{y}(t)$$

$$\dot{y}(t) = 20u(t) - 100t \Rightarrow \ddot{y}(t) = 20\delta(t) - 100$$

نکته: تابع ضربه واحد مشتق تابع پله واحد است و متناظر با آن پاسخ سیستم به تابع ضربه، مشتق پاسخ سیستم به تابع پله است.

$$\text{معادله دینامیکی سیستم} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 z = -\ddot{y} = 100 - 20\delta(t)$$

$$\Rightarrow s^2 Z(s) + \omega_n^2 Z(s) = \frac{100}{s} - 20$$

حال این معادله را با روش لاپلاس حل می کنیم:

$$\bar{Z}(s) = \frac{100}{s(s^2 + \omega_n^2)} - \frac{20}{s^2 + \omega_n^2} \Rightarrow z(t) = \frac{100}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) - \frac{20}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = \frac{100}{\omega_n} \sin \omega_n t_p - 20 \cos \omega_n t_p = 0 \Rightarrow \tan \omega_n t_p = \frac{\omega_n}{5} \Rightarrow t_p = \frac{\tan^{-1} 2}{10}$$

نکته:

$$L^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} = \int_0^t f(u) du$$

۹۲ - گزینه «۳»

باید معادله حاکم بر سیستم را بنویسیم: (معادله دیفرانسیل غیرهمگن با ضرایب ثابت) $m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 e^{-at}$ پاسخ کلی سیستم، مجموع پاسخ همگن و پاسخ خصوصی می‌باشد لذا:

$$x(t) = x_h + x_p \Rightarrow x_h = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

$$x_p = ce^{-at} \Rightarrow \text{جایگذاری در معادله} \Rightarrow c = \frac{F_0}{ma^2 + k} = \frac{F_0}{m(a^2 + \omega_n^2)}$$

حال با جایگذاری شرایط اولیه صفر در معادله اصلی سیستم خواهیم داشت.

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = \frac{-F_0}{ma^2 + k} = -\frac{F_0}{m(a^2 + \omega_n^2)}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{F_0 a}{m\omega_n(a^2 + \omega_n^2)}$$

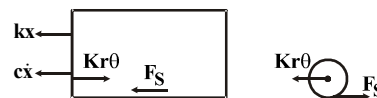
۹۳ - گزینه «۲»

$$\text{فرض غلتش} \Rightarrow x_{\frac{m}{M}} = r\theta \Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x} + r\ddot{\theta}$$

$$(1) \quad \sum F_x = M\ddot{x} \Rightarrow -kx - c\dot{x} - k(-r\theta) - F_s = M\ddot{x} \Rightarrow F_s = M\ddot{x} + c\dot{x} + kx - kr\theta$$

$$(2) \quad \sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -kr\theta + F_s = m(\ddot{x} + r\ddot{\theta}) \Rightarrow m(\ddot{x} + r\ddot{\theta}) + kr\theta = F_s$$

$$(3) \quad \sum M_a = J_a \ddot{\theta} \Rightarrow -rF_s = J_o \ddot{\theta} = \frac{1}{2} mr \ddot{\theta} \Rightarrow F_s = -\frac{mr \ddot{\theta}}{2}$$



با جایگذاری معادله (۳) در معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x} + c\dot{x} + kx - kr\theta = -\frac{mr \ddot{\theta}}{2} \Rightarrow 2M\ddot{x} + mr \ddot{\theta} + 2c\dot{x} + 2kx - 2kr\theta = 0 \\ m(\ddot{x} + r\ddot{\theta}) + kr\theta = -\frac{mr \ddot{\theta}}{2} \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{3}{2}mr \ddot{\theta} + kr\theta = 0 \end{cases}$$

۹۴ - گزینه «۳»

معادلات را در فرم ماتریس می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{با فرض } \begin{matrix} x = A \cos \omega t \\ \theta = B \cos \omega t \end{matrix}$$

$$\det[k - \omega^2 M] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 2 - 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 0/63 \\ \omega_2^2 = 2/36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{X} \Big|_{\omega_1} = \frac{2 - \omega_1^2}{1} = 1/27$$

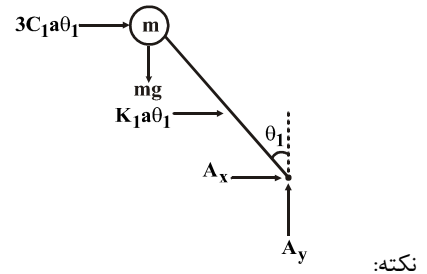
$$\frac{Y}{X} \Big|_{\omega_2} = \frac{2 - \omega_2^2}{1} = -0/36$$

۹۵- گزینه «۱»

سیستم دو درجه آزادی متقارن است لذا برای مود اول می توان c_p, k_p را حذف کرد:

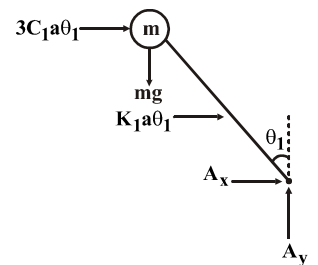
$$\begin{aligned}\sum T_A &= I_A \ddot{\theta}_1 \\ \Rightarrow -r c_1 a \dot{\theta}_1 (ra) - k_1 (a \theta_1) a + mg (ra \theta_1) &= m (ra)^r \ddot{\theta}_1 \\ \Rightarrow ma \ddot{\theta}_1 + c_1 a \dot{\theta}_1 + (k_1 a - r mg) \theta_1 &= 0 \\ \Rightarrow \omega_{d1} &= \sqrt{\frac{k_1 a - r mg}{ma} - \frac{c_1^2}{4m^2}}\end{aligned}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_{eq}^r}{m_{eq}^r} - \frac{C_{eq}^r}{4m_{eq}^2}}$$



در مود دوم اثر c_p, k_p را دو برابر می کنیم:

$$\begin{aligned}\sum T_A &= I_A \ddot{\theta}_r \\ \Rightarrow -r c_1 a \dot{\theta}_r (ra) - r (r k_p a \theta_r) (ra) + mg (ra \theta_r) - r (r c_p a \dot{\theta}_r) (ra) - k (a \theta_r) a &= m (ra)^r \ddot{\theta}_r \\ \Rightarrow ma \ddot{\theta}_r + (c_1 + \lambda c_r) a \dot{\theta}_r + [(k_1 + \lambda k_r) a - r mg] \theta_r &= 0 \\ \Rightarrow \omega_d &= \sqrt{\frac{(k_1 + \lambda k_r) a - r mg}{ma} - \frac{(c_1 + \lambda c_r)^2}{4r^2 m^2}}\end{aligned}$$



۹۶- گزینه «۱»

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته سیستم کنترلی را به دست می آوریم:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{s + 4}$$

می دانیم که اگر ورودی سیستم یعنی $r(t)$ یک تابع سینوسی یا کسینوسی باشد، آن گاه پاسخ پایدار سیستم هم متناظراً سینوسی یا کسینوسی خواهد بود با همان فرکانس ورودی اما با دامنه و فاز متفاوت، یعنی:

$$\begin{aligned}r(t) &= a \cos \omega t \Rightarrow c_{ss} = \alpha M(\omega) \cos(\omega t + \phi) \\ \left. \begin{aligned} \left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| &= |M(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4^2}} \Rightarrow \omega = 4 \Rightarrow |M(\omega)| = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \phi = \angle M(j\omega) &= \angle \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = -\tan^{-1} \frac{\omega}{4} \Rightarrow \omega = 4 \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{r}{4\sqrt{2}} \cos\left(4t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

۹۷- گزینه «۴»

چون تفاضل درجهٔ مخرج و صورت ۳ واحد می‌باشد لذا در فرکانس‌های بالا ($\omega \rightarrow \infty$) زاویه فاز -۲۷۰° درجه می‌باشد و در فرکانس‌های پایین ($\omega \rightarrow 0$) زاویه فاز صفر می‌باشد.

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{3}$$

$$\omega \approx 0 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx 0$$

$$\omega \approx \infty \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -\frac{3\pi}{2}$$

$$G(j\omega) = \frac{12}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{12}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 6} = \frac{12}{j(11\omega - \omega^3) + (6 - 6\omega^2)}$$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0 \Rightarrow 6 - 6\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{Im}(G(j\omega))|_{\omega=1} = \frac{12}{10j} = -1/2j$$

تنها گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۹۸- گزینه «۴»

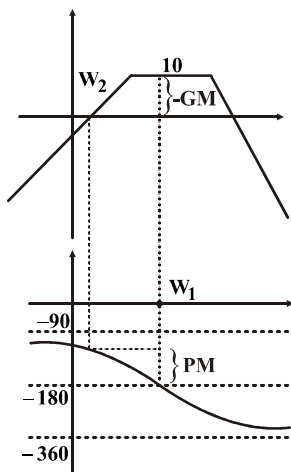
$$G(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1-\omega^2 + j\frac{\omega}{4})} \Rightarrow$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{0/5\omega}{1-\omega^2} \Rightarrow \text{فرکانس قطع فاز} = -180^\circ \Rightarrow \tan^{-1} \frac{0/5}{1-\omega^2} = -90^\circ \Rightarrow \omega = 1$$

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{\omega \sqrt{(1-\omega^2)^2 + (\frac{\omega}{4})^2}} \Rightarrow \text{حد بهره GM} = \frac{1}{|G(j\omega)|_{\omega=1}} = \frac{1}{4}$$

۹۹- گزینه «۴»

ابتدا فرکانس قطع فاز ω_1 و فرکانس قطع بهره ω_2 را به دست می‌آوریم.



در فرکانس قطع فاز:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_1} > 1 \Rightarrow \text{GM} = -20 \log |G(j\omega)|_{\omega=\omega_1} < 0$$

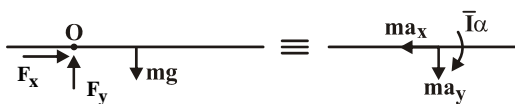
$$\angle G(j\omega)|_{\omega=\omega_1} > -180^\circ \Rightarrow \text{PM} = \angle G(j\omega)|_{\omega=\omega_1} + 180^\circ \Rightarrow \text{PM} > 0$$

$$\text{شکل (الف): } \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \Delta \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \Delta$$

$$\text{شکل (ب): } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \Rightarrow C(s) = R(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$C_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \times \frac{\Delta}{1 + \Delta} = \frac{\Delta}{\epsilon}$$

ترسیمه آزاد تیر را رسم می‌کنیم:



$$\sum M_o = I_o \alpha, \quad I_o = \bar{I} + md^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{16} mL^2 = \frac{7}{48} mL^2$$

$$mg \frac{L}{4} = \frac{7}{48} mL^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{12}{7} \frac{g}{L}$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow F_y - mg = -m\left(\frac{L}{4} \times \frac{12}{7} \frac{g}{L}\right) = -\frac{3}{7} mg \Rightarrow F_y = mg - \frac{3}{7} mg = \frac{4}{7} mg$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_x = 0$$

$$\vec{F}_o = \frac{4}{7} mg \vec{j}, \quad F_o = \frac{4}{7} mg = 0.5714 mg = 0.5714 w$$

۱۰۲- گزینه «۱»

$$H_{O_1} = m\bar{r}d + \bar{I}\omega = (mL^2 + \bar{I})\omega_0 = (mL^2 + \frac{1}{2}mr^2)\omega_0 = \frac{9}{2}mr^2\omega_0$$

مومنتم زاویه‌ای در حالت اول برابر است با:
 دیسک نیز با سرعت زاویه‌ای ω_0 دوران می‌کند.
 اما مومنتم زاویه‌ای در حالت دوم برابر است با:

$$\omega_{\text{دیسک فضا}} = \omega_{\text{دیسک میله}} + \omega_{\text{میله فضا}} = 2\omega_0\vec{k} - \omega_0\vec{k} = \omega_0\vec{k}$$

$$H_{O_2} = m(\omega_0 L^2) - \frac{1}{2}mr^2\omega_0 = \frac{7}{2}mr^2\omega_0$$

$$\frac{H_{O_1}}{H_{O_2}} = \frac{\frac{9}{2}mr^2\omega_0}{\frac{7}{2}mr^2\omega_0} = \frac{9}{7}$$

۱۰۳- گزینه «۳»

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \cancel{\Delta V_c}$$

$$U = pb \sin \theta$$

$$\Delta T = [\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_0 b^2)\omega^2] \times 2 + 0$$

$$\Delta V_g = [-m_0 g (\frac{b}{2} \sin \theta)] \times 2 + 0$$

$$pb \sin \theta = \frac{1}{3}m_0 b^2 \omega^2 - m_0 g b \sin \theta$$

$$\frac{1}{3}m_0 b^2 \omega^2 = pb \sin \theta + m_0 g b \sin \theta$$

$$\omega^2 = \frac{3(p + m_0 g)b \sin \theta}{m_0 b^2} = \frac{3(m_0 g + m_0 g) \sin \theta}{m_0 b} = 3\sqrt{\frac{g}{b}}$$

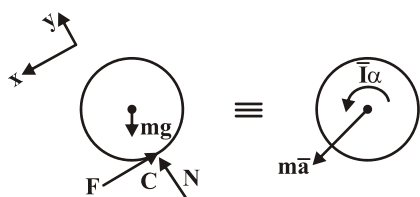
$$\omega = \sqrt{3\sqrt{\frac{g}{b}}} \quad \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

با استفاده از رابطه کار و انرژی داریم:

با توجه به اینکه قبل از حالت افقی OB دیسک به سمت راست و بعد از آن به سمت چپ حرکت خواهد کرد در لحظه‌ای که لینک OB افقی است سرعت زاویه‌ای دیسک صفر می‌باشد.

۱۰۴- گزینه «۴»

با توجه به اینکه در صورت سؤال قید لغزش یا غلتش نیامده باید بررسی کنیم: ابتدا فرض غلتش می‌کنیم.



$$\sum M_G = \bar{I}\alpha \Rightarrow Fr = \bar{I}\alpha = \bar{I} \frac{\bar{a}}{r}, \quad \bar{a} = r\alpha$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_z \Rightarrow mg \sin \theta - F = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = \frac{Fr}{\bar{I}} = \frac{Fr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2F}{m}$$

$$mg \sin \theta - F = m\left(\frac{2F}{m}\right)$$

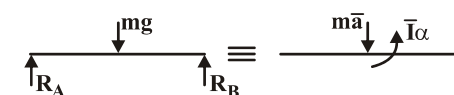
$$2F = mg \sin \theta \Rightarrow F = \frac{1}{2}mg \sin \theta = 0.33(mg \sin 45)$$

$$f_{s\max} = \mu_s N = 0.35(mg \cos \theta) = 0.35(mg \cos 45)$$

بنابراین با توجه به اینکه F نیروی اصطکاک غلتشی کمتر از $F_{s\max}$ فرض غلتش ناب صحیح بوده و هیچ انرژی تلف نمی‌شود.

۱۰۵- گزینه «۲»

ترسیمه آزاد را در لحظه ورود به مسیر دایروی رسم می‌کنیم:



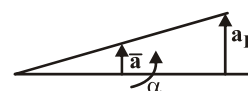
$$a_B = \frac{v^2}{r}, \quad \bar{a} = \frac{a_B}{r} = \frac{v^2}{r^2}$$

$$\alpha = \frac{a_B}{L} = \frac{v^2}{rL}$$

$$\sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow R_B = \frac{mg}{r} + \frac{1}{r} \frac{mv^2}{r}$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y, \quad \sum M_G = \bar{I}\alpha \Rightarrow R_B \frac{L}{r} - R_A \times \frac{L}{r} = \frac{1}{12}mL^2 \left(\frac{v^2}{rL}\right)$$

$$R_A = \frac{mg}{r} - \frac{2}{3} \frac{mv^2}{r}$$



$$\frac{mg}{r} - \frac{2}{3} \frac{mv^2}{r} > 0$$

$$\frac{mg}{r} > \frac{2}{3} \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{4}{3} \frac{v^2}{rg} < 1$$

در صورتیکه $R_A \leq 0$ باشد این نیرو وجود ندارد:

۱۰۶- گزینه «۳»

با استفاده از ضرایب تاثیر ماتریس سفتی داریم:

$$\begin{Bmatrix} f_c \\ M_c \\ f_r \\ f_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_c \\ \theta_c \\ X_r \\ X_f \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_r = X_f = 0 \\ \theta_c = 0 \end{cases}, X_c = 10^\circ \text{ برای ستون اول,}$$

$$X_c = X_r = X_f = 0, \theta_c = 10^\circ \text{ برای ستون دوم,}$$

$$\begin{cases} X_c = X_r = 0 \\ \theta_c = 0 \end{cases}, X_f = 10^\circ \text{ برای ستون چهارم,} \quad (\text{نیروهای لازم تا حالات در نظر گرفته شده حفظ شود})$$

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_r & a(K_1 - K_r) & -K_1 & -K_r \\ a(K_1 - K_r) & a^2(K_1 + K_r) & -K_1 a & +K_r a \\ -K_1 & -K_1 a & K_1 + K_r & 0 \\ -K_r & +K_r a & 0 & K_r + K_f \end{bmatrix}$$

ابتدا معادله را به فرم ماتریسی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \lambda_2 = 3 + \sqrt{5} = 5/236$$

با توجه به این که مختصات بر روی جرم‌ها در نظر گرفته شده است بنابراین ماتریس جرم قطری می‌باشد و تنها ماتریس سفتی را می‌یابیم، با استفاده از ضرایب تاثیر ماتریس سفتی داریم:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$$X_2 = X_3 = 0, X_1 = 1/0 \text{, ستون اول,}$$

$$X_3 = X_1 = 0, X_2 = 1/0 \text{, ستون دوم,}$$

$$X_1 = X_2 = 0, X_3 = 1/0 \text{, ستون سوم,}$$

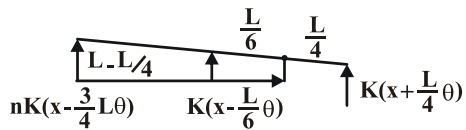
برای حفظ شرایط فوق باید نیروهای اعمال کنیم که این نیروها همان درآیه‌ها می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

۱۰۹- گزینه «۴»

معادله حرکت سیستم را می‌نویسیم: باید دقت شود چون مختصات منطبق بر مرکز جرم می‌باشد بنابراین ماتریس جرم قطری می‌باشد، تنها باید ماتریس سفتی را قطری کنیم.



$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -K(x + \frac{L}{4}\theta) - K(x - \frac{L}{6}\theta) - nK(x - \frac{3}{4}L\theta) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + (\gamma + n)Kx + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}n)KL\theta = 0$$

$$\frac{1}{12} - \frac{3}{4}n = 0 \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{3}{4}n \Rightarrow n = \frac{1}{9}$$

همین عبارت کافی است چون ماتریس سفتی متقارن است.

۱۱۰- گزینه «۳»

گزینه ۱ تعریف مد طبیعی می‌باشد که در حقیقت هنگامی که سیستم در مد طبیعی باشد تمام نقاط آن به طور همزمان از وضعیت تعادل استاتیکی عبور می‌کنند.

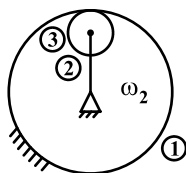
در گزینه ۲، Q_i در معادله لاگرانژ نیروی وارد بر درجه آزادی i از طرف محرک خارجی یا میرایی می‌باشد.

در گزینه ۴ با استفاده از تعامد مدها می‌توان با استفاده از تبدیل ماتریس‌ها این عمل را انجام داد.

گزینه ۳ نادرست می‌باشد زیرا در سیستم‌های ارتعاشی با توجه به شرایط اولیه می‌توان ترکیبی از مدها یا تنها یک مد خاص را داشته باشیم.

۱۱۱- گزینه «۱»

با توجه به شکل و با توجه به اینکه چرخ‌دنده ① ساکن است $\omega_1 = 0$



$$\frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{N_1}{N_3}$$

پس

$$\Rightarrow \frac{\omega_3 - \omega_2}{-\omega_2} = \frac{N_1}{N_3} \Rightarrow \omega_3 - \omega_2 = \frac{-N_1}{N_3}\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_3 = (1 - \frac{N_1}{N_3})\omega_2$$

۱۱۲ - گزینه «۴»

$$\frac{\omega_{\Delta} - \omega_{\epsilon}}{\omega_{\gamma} - \omega_{\epsilon}} = \frac{\omega_{\Delta} - 75}{50 - 75} = \frac{N_{\gamma} N_{\epsilon}}{N_{\gamma} N_{\Delta}} = \frac{18 \times 25}{22 \times 15} \Rightarrow$$

$$\frac{\omega_{\Delta} - 75}{-25} = \frac{18 \times 25}{22 \times 15} \Rightarrow \frac{\omega_{\Delta} - 75}{-25} = \frac{450}{330} \Rightarrow$$

$$\omega_{\Delta} = 40/9 \approx 41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

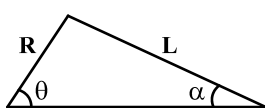
چون سرعت زوایای ω_{γ} و ω_{ϵ} که در جهت ساعتگرد بود، مثبت گرفتیم و چون عدد ω_{Δ} بدست آمده، مثبت شد، پس چرخ‌دنده (۵) ساعتگرد است. در نتیجه گزینه ۴ صحیح است.

۱۱۳ - گزینه «۳»

$$x_p = R \cos \theta + L \cos \alpha$$

باتوجه به شکل:

$$R \sin \theta = L \sin \alpha \quad \text{از طرفی}$$



$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}}{L}$$

یعنی

$$\Rightarrow x_p = R \cos \theta + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow V_p = \omega(-R \sin \theta + \frac{-2R^2 \sin \theta \cos \theta}{2\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}})$$

$$= \omega(-R \sin \theta + \frac{-R^2 \sin 2\theta}{2\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}})$$

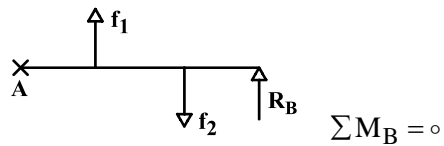
با ساده‌سازی انجام‌شونده:

$$V_p = -R\omega(\sin \theta + \frac{R}{2L} \sin 2\theta)$$

$$L^2 - R^2 \sin^2 \theta \approx L^2 \quad \text{یعنی}$$

۱۱۴ - گزینه «۴»

با توجه به شکل روبرو، با گشتاورگیری حول تکیه‌گاه A



$$f_1 = m_1 R_1 \omega^2 = 2 \times 0.5 \times 100 = 100 \text{ N}$$

$$f_2 = m_2 R_2 \omega^2 = 3 \times 0.1 \times 100 = 30 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times (7) + f_1 \times (2/5) = f_2 \times (7/2)$$

$$\Rightarrow R_B = 30 \times (7/2) - 10 \times (7/5) = 210 - 14 = 196 \text{ N}$$

۱۱۵ - گزینه «۴»

رابطه تغییر مکان پیرو نسبت به تغییر زاویه بادامک در بادامک سؤال موردنظر برابر است با:

که $y'' = -e \sin \theta$ تکانه و $y'' = e \cos \theta$ شتاب a و $y' = e \sin \theta$ سرعت v پس تمامی نمودارها (سرعت، شتاب و تکانه) پیوسته هستند.

۱۱۶- گزینه «۳»

اولاً با توجه به این که در دیاگرام قطبی سیستم از o^- به صفر o^+ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دور زده است بنابراین در مسیر نایکوئیست باید حول صفر در جهت عقربه‌های ساعت دور بزنند. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند.

ثانیاً با توجه به این که در دیاگرام قطبی نقطه شروع دیاگرام یعنی o^+ به صورت بالا است این بدان معنی است که با توجه به مینیمم فاز بودن، سیستم از نوع ۳ می‌باشد یعنی باید $S = 0$ از مرتبه ۳ در مخرج داشته باشیم.

توجه: با توجه به نقطه انتهایی دیاگرام قطبی یعنی نقطه $w = \infty$ با توجه به مینیمم فاز بودن، سیستم مربوط به حالتی است که اختلاف درجه مخرج و صورت برابر ۴ باشد که در همه گزینه‌ها این مورد رعایت شده است.

۱۱۷- گزینه «۲»

اولاً با توجه به معیار پایداری نایکوئیست زمانی سیستم پایدار است که Z که تعداد صفرهای معادله مشخصه است برابر صفر باشد یعنی $Z = 0$. ثانیاً دو حالت مختلف برای دیاگرام نایکوئیست شکل بالا می‌تواند وجود داشته باشد. یکی این که دیاگرام نایکوئیست نقطه (-1) روی محور حقیقی را دور نزنند و حالت دیگر موقعی است که دیاگرام نایکوئیست نقطه (-1) را دور بزند که برای هر حالت داریم:

$$N = 0 \Leftarrow \text{معیار پایداری نایکوئیست } Z = N + P \Rightarrow P = Z - N \text{ در هیچ یک از گزینه‌ها موجود نیست پس منظور حالت دوم بوده است.}$$

$$P = 0 - 0 = 0$$

حالت دوم) دیاگرام (-1) را دور بزند:

از آن جا که شکل داده شده برای حالت o^+ تا $+\infty$ است با کامل کردن شکل برای o^- و $-\infty$ مشخص می‌شود که منحنی نایکوئیست دوبار نقطه (-1) را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دور می‌زند $N = -2 \Leftarrow$

$$P = Z - N = 0 - (-2) = 2$$

سیستم حلقه باز دو قطب در سمت راست محور موهومی دارد.
برای این که منحنی نایکوئیست نقطه (-1) را دور بزند:

$$\frac{-K}{3} < -1 \Rightarrow K > 3$$

۱۱۸- گزینه «۳»

برای بدست آوردن شکل دیاگرام فاز ابتدا باید با توجه به دیاگرام اندازه لگاریتمی (db) شکل تابع تبدیل حلقه باز را بدست آوریم لذا داریم:

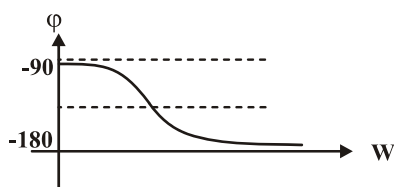
$$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$$

چون شیب ابتدایی نمودار $20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$ بنابراین یک s در مخرج داریم و چون در فرکانس گوشه‌ی ۱، شیب صفر شده است پس عبارت $s+1$

در صورت است و چون در $w=2$ شیب به $-20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$ به $-40 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$ رسیده است بنابراین $(s+5)$ در مخرج است.

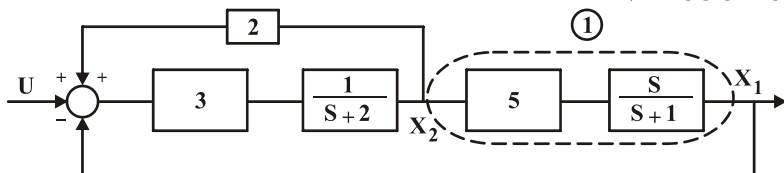
$$\angle GH(s) = -90^\circ + \tan^{-1} \frac{w}{1} - \tan^{-1} \frac{w}{2} - \tan^{-1} \frac{w}{5}$$

$$\begin{aligned} w \rightarrow 0 &\Rightarrow \angle GH \rightarrow -90^\circ \\ w \rightarrow \infty &\Rightarrow \angle GH \rightarrow -180^\circ \end{aligned}$$



۱۱۹- گزینه «۴»

برای محاسبه معادلات حالت باید رابطه بین \dot{x} ها و x ها را طبق زیر بیابیم:



$$(1) \Rightarrow \Delta \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + x_1$$

$$\text{برای جمع کننده} \Rightarrow u - x_1 + 2x_2 = \frac{\dot{x}_2 + 2x_2}{3} \Rightarrow \dot{x}_2 = 3u - 3x_1 + 4x_2$$

با جای گذاری \dot{x}_2 در رابطه بالایی داریم:

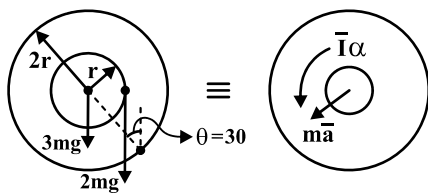
$$\dot{x}_1 = \Delta \dot{x}_2 - x_1 = \Delta(3u - 3x_1 + 4x_2) - x_1 = 15u - 16x_1 + 20x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -16 & 20 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

از پاسخ سیستم‌های مرتبه دوم به ورودی پله واحد می‌دانیم که پاسخ فوق برای یک سیستم با میرایی کمتر از یک (میرایی غیر بحرانی) است. طبق خواص موجود برای کنترلرها، برای ایجاد میرایی بیشتر باید از کنترلر PD استفاده کرد و این در حالی است که PD توانایی کاهش خط را ندارد. کنترل کننده PI می‌تواند خطا را بهبود بخشد لذا در مجموع به یک کنترل کننده PID احتیاج داریم.

۱۲۱- گزینه «۲»

دیاگرام آزاد و نیروهای وارد بر دیسک را به صورت زیر ترسیم می کنیم:



$$\sum M_o = I_o \alpha$$

$$I_o = \bar{I}_{\text{دیسک}} + md^2$$

$$d = 2r \Rightarrow I_o = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}m)(2r)^2 + (\frac{3}{2}m)(2r)^2 = 6mr^2 + 6mr^2 = 12mr^2$$

$$\sum M_o = I_o \alpha \Rightarrow 3mgr(2r \sin \theta) + mg(2r \sin \theta + 2r) + 2mg(2r \sin \theta - r) = 12mr^2 \alpha$$

$$3mgr + 3mgr = 12mr^2 \alpha \Rightarrow 6g = 12r \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{g}{2r}$$

برای حل از روش کار و انرژی استفاده می‌کنیم، لذا ابتدا انرژی‌های جنبشی و پتانسیل را در موقعیت‌های اولیه و نهایی محاسبه می‌کنیم، بنابراین: روش اول:

$$(V_g)_1 = mgl \sin \theta \quad \text{و} \quad (V_g)_2 = 0$$

$$T_1 = 0 \quad \text{و} \quad T_2 = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\bar{V} = V_B \Rightarrow \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{B/A} \Rightarrow -V_B \vec{j} = V_A \vec{i} + (-\omega k) \times (l \cos \theta \vec{i} + l \sin \theta \vec{j})$$

$$-V_B \vec{j} = V_A \vec{i} + (-\omega l \cos \theta \vec{j} + \omega l \sin \theta \vec{i}) \Rightarrow \begin{cases} V_B = \omega l \cos \theta \\ V_A = \omega l \sin \theta \end{cases}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m (2l)^2 \right) \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega^2 l^2 \cos^2 \theta) = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

$$T_1 + V_{g1} = T_2 + V_{g2} \Rightarrow mgl \sin \theta + 0 = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

$$\omega^2 = \frac{6g \sin \theta}{l(1 + 3 \cos^2 \theta)} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6g \sin \theta}{l(1 + 3 \cos^2 \theta)}}$$

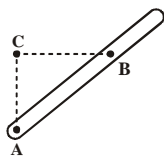
روش دوم (تستی):

روش ساده‌تر برای محاسبه T_2 استفاده از مرکز آنی دوران می‌باشد، لذا:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad \text{و} \quad I_C = \bar{I} + m d^2 \quad \text{و} \quad d = l \cos \theta$$

$$\Rightarrow I_C = \bar{I} + m l^2 \cos^2 \theta \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} (\bar{I} + m l^2 \cos^2 \theta) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m (2l)^2 + m l^2 \cos^2 \theta \right) \omega^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2 (1 + 3 \cos^2 \theta) \quad (\text{ادامه حل مانند روش قبل است})$$



۱۲۳ - گزینه «۴»

برای بدست آوردن شتاب نقطه B باید ابتدا شتاب مرکز جرم و همچنین شتاب زاویه‌ای ورق را در ابتدای حرکت بدست آوریم، لذا دیانگرام آزاد نیروهای وارد بر ورق به صورت زیر است:



$$d = \frac{1}{3}h = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{F}{m}$$

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha \quad \text{و} \quad M_o = F \times \frac{h}{3} = \frac{Fl\sqrt{3}}{6}$$

$$\bar{I} = \frac{1}{12} \left(\frac{m}{3} \right) l^2 + \frac{m}{3} d^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l^2}{12} \right) = \frac{1}{6} ml^2$$

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha \Rightarrow \frac{F \times l\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{6} ml^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F\sqrt{3}}{ml}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{a}_{\frac{B}{G}} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\frac{B}{G}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\frac{B}{G}})$$

$$\omega = 0 \rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\frac{B}{G}} \Rightarrow \vec{a}_B = \frac{F}{m} \vec{i} + \left(\frac{F\sqrt{3}}{ml} \vec{k} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}h}{3} \vec{j} \right) = \frac{F}{m} \vec{i} - \frac{F\sqrt{3}}{ml} \times \frac{l\sqrt{3}}{3} \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_B = 0$$

۱۲۴ - گزینه «۳»

از آن جایی که زمان برخورد بسیار کوچک است بنابراین با استفاده از بقاء مومنتمم زاویه‌ای حول مرکز دیسک برای قبل و بعد از برخورد گلوله به دیسک داریم: (C نقطه مرکز آنی سرعت صفر (تماس روی زمین) است)

$$\int \sum M_c dt = H_{c_f} - H_{c_i} \xrightarrow{dt \approx 0} H_{c_f} = H_{c_i}$$

$$H_{c_i} = \frac{m}{4} V \times \left(\frac{\sqrt{3}R}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}mVR}{8}$$

$$H_{c_f} = \frac{m}{4} \left(\frac{\sqrt{3}R}{2} \omega \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}R}{2} \right) + m(R\omega) \times R + \bar{I}\omega$$

$$\Rightarrow H_{c_f} = \frac{9mR^2\omega}{16} + mR^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega = mR^2\omega \left(\frac{9}{16} + 1 + \frac{1}{2} \right) = mR^2\omega \left(\frac{33}{16} \right)$$

$$\Rightarrow H_{c_i} = H_{c_f} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}mVR}{8} = mR^2\omega \times \frac{33}{16} \Rightarrow \omega = \frac{2}{11} \frac{V}{R}$$

۱۲۵- گزینه «۳»

نسبت به محورهاى XYZ داریم:

$$\vec{\omega} = \omega_p \vec{i} - \omega_1 \vec{j} + p \vec{k}$$

$$\vec{\Omega} = \omega_p \vec{i} - \omega_1 \vec{j} \quad \text{سرعت زاویه‌ای دوران دستگاه XYZ}$$

سرعت زاویه‌ای دیسک برابر است با:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = \omega_p \frac{d\vec{i}}{dt} - \omega_1 \frac{d\vec{j}}{dt} + p \frac{d\vec{k}}{dt} \Rightarrow \vec{\alpha} = \omega_p [\vec{\Omega} \times \vec{i}] + p [\vec{\Omega} \times \vec{k}]$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \omega_p [(\omega_p \vec{i} - \omega_1 \vec{j}) \times \vec{i}] + p [(\omega_p \vec{i} - \omega_1 \vec{j}) \times \vec{k}]$$

$$\Rightarrow \omega_p \omega_p \vec{k} - p \omega_p \vec{j} - p \omega_1 \vec{i} = -p \omega_1 \vec{i} - p \omega_p \vec{j} + \omega_p \omega_p \vec{k}$$

۱۲۶- گزینه «۱»

با توجه به گزینه‌های مساله باید مدل ارتعاشی معادل برای حالت سری C و K را بیابیم:
با استفاده از مفهوم سختی مختلط داریم:

$$K_1^* = K$$

$$K_2^* = iwc$$

$$K_{eq}^* = \frac{iwck}{K + iwc}$$

$$K_{eq}^* = \frac{ik^r wc + kw^r c^r}{k^r + w^r c^r}$$

$$K_{eq} = \frac{kw^r c^r}{k^r + w^r c^r} \quad \text{و} \quad C_{eq} = \frac{k^r c}{k^r + w^r c^r}$$

با توجه به این که ارتعاشات آزاد بدون فرکانس تحریک می‌باشد، $w = 0$ ، $C_{eq} = \frac{k^r c}{k^r} = c$ و $k_a = 0$ بنابراین:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

۱۲۷- گزینه «۳»

با استفاده از ضرایب ماتریس سختی داریم:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & -k & 0 \\ -k & 2k & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & -k \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix}$$

ابتدا $x_1 = 1/0$ و $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ شرایط نیرویی برای حفظ این حالت را می‌یابیم. $f = kx$ و ستون اول ماتریس بدست می‌آید.

و به همین منوال سایر ستون‌ها را می‌یابیم.

باید دقت داشت که ماتریس متقارن نیست که به علت انتخاب مختصات می‌باشد. اگر x_2 و x_3 تغییر یابند و جابجا شوند ماتریس متقارن خواهد شد.

۱۲۸- گزینه «۲»

ابتدا معادلات حرکت و فرکانس طبیعی سیستم را می‌یابیم.

$$\omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad F_1 = 10 \text{ N}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\lambda = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \lambda = \frac{3}{2} \frac{k}{m}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{1000}{60}} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$X_1 = \frac{(k - 2m\omega^2)F_1}{2m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} = \frac{(1000 - 2 \times 60 \times 16) \times 10}{2 \times 3600 \times (-16) \times (25 - 16)} = 8/87 \text{ mm}$$

بنابراین در فاز مخالف می‌باشند.

$$X_2 = \frac{kF_1}{2m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} = \frac{1000 \times 10}{2 \times 3600 \times (-16) \times (25 - 16)} = -9/64 \text{ mm}$$

۱۲۹- گزینه «۴»

با توجه به اینکه بردارهای ویژه در سیستم‌های چند درجه آزادی متعامد می‌باشند و با استفاده از شرط تعامد داریم:

$$\varphi_i^T M \varphi_j = 0 \quad \text{و} \quad \varphi_i^T k \varphi_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$[1 \quad -\omega/\Delta] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [m - m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$[1 \quad -\omega/\Delta] \begin{bmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{و} \quad 125x_1 = 200x_2$$

بنابراین چنین سیستمی فاقد بردار ویژه دوم می‌باشد و بردار ویژه مد اول نیز صحیح نمی‌باشد (شرط تعامد برقرار نیست)

۱۳۰- گزینه «۲»

با استفاده از معادله لاگرانژ داریم:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$U = mg(r_0 - r) \cos \theta + \frac{1}{2} k(r - r_0)^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - mg(r_0 - r) \cos \theta - \frac{1}{2} k(r - r_0)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(r - r_0) \sin \theta$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + k(r - r_0) = 0 \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + k(r - r_0) = mg \cos \theta$$

$$mr^2 \ddot{\theta} + mg(r - r_0) \sin \theta = 0$$

۱۳۱- گزینه «۲»

برای بادامک‌ها با شتاب ثابت و سیکلوئیدی داریم:

$$A = A_{\max_1} = \frac{r h \omega^2}{\beta^2} \quad \text{برای شتاب ثابت}$$

$$A = \frac{r h \omega^2}{\beta^2} \sin \frac{r \pi \theta}{\beta} \quad \text{و} \quad A_{\max_2} = \frac{r h \omega^2}{\beta^2}$$

بنابراین:

$$\frac{A_{\max_1}}{A_{\max_2}} \frac{\frac{r h \omega^2}{\beta_1^2}}{\frac{r h \omega^2}{\beta_2^2}} = \frac{r}{\pi}$$

دقت کنیم گزینه‌های ۱ و ۴ از نظر دیمانسیون صحیح نمی‌باشد.

۱۳۲ - گزینه «۳»

در مورد بالانس موتورهای چند سیلندر خطی داریم:
نیروهای اولیه:

$$\sum \cos \varphi_n = 0 \text{ و } \sum \sin \varphi_n = 0$$

$$\sum \cos 2\varphi_n = 0 \text{ و } \sum \sin 2\varphi_n = 0$$

نیروهای ثانویه:

$$\sum a_n \cos \varphi_n = 0 \text{ و } \sum a_n \sin \varphi_n = 0$$

گشتاور اولیه:

$$\sum a_n \cos 2\varphi_n = 0 \text{ و } \sum a_n \sin 2\varphi_n = 0$$

گشتاور ثانویه:

در مورد تک جرم دوار داریم:

$$M_e R_e = MR$$

۱۳۳ - گزینه «۳»

برای برداشتن تعادل استاتیکی باید مجموع برداری تمام نیروها صفر باشد. نیروی $F_{۲۳}$ و $F_{۴۵}$ نیروهای داخلی‌اند. در مورد جسم ۶ دقت کنیم
نیروی $F_{۵۶}$ با نیروی $F_{۶۵}$ برابر می‌باشد.

$$F_{۱۳} + F_{۱۲} + F_{۱۶} + F + N + G = 0$$

۱۳۴ - گزینه «۲»

با استفاده از روش جدول برای مجموعه خورشیدی داریم:

$$\omega_r = -10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_d = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(حرکت در جهت عقربه‌های ساعت مثبت)

	بازو #۵	#۲	#۴
مجموعه قفل	۲۰	۲۰	۲۰
بازو ثابت	۰	-۳۰	-۲۰
	۲۰	-۱۰	۰

برای حالتی که بازو ثابت است، برای مجموعه چرخنده مرکب داریم:

$$\frac{\omega_f}{\omega_r} = \frac{N_r \times N_r}{N_r \times N_f} = + \frac{N_r}{N_f} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\omega_f = -\frac{2}{3} \times (-30) = -20$$

۱۳۵ - گزینه «۲»

با استفاده از روش جدول داریم: (CΩ را مثبت می‌گیریم)

	بازو ۷	#۲	#۶
مجموعه قفل	x	x	x
بازو ثابت	۰	۱۰-x	$\frac{1}{3}(10-x)$
	x	۱۰	$x + \frac{1}{3}(10-x)$

با ثابت بودن بازو و داشتن چرخنده مرکب داریم:

$$\frac{\omega_f}{\omega_r} = \frac{N_r N_r N_d}{N_r N_f N_f} = \frac{N_r N_d}{N_f N_f} = \frac{10 \times 10}{10 \times 30} = + \frac{1}{3}$$

$$\omega_f = \frac{1}{3}(10-x)$$

$$x + \frac{1}{3}(10-x) = -20 \Rightarrow x = -35 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

بنابراین از نمای چپ در جهت CCW می‌چرخد.

۱۳۶- گزینه «۳»

ابتدا تابع تبدیل حلقه باز را سیستم داده شده را با استفاده از دیاگرام بود داده شده می‌یابیم، لذا:

$$GH(s) = \frac{k(s+1)(s+2)^3}{s^2}$$

با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \log |GH| = 60 \\ \omega = 0.1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{K \times \sqrt{\omega^2 + 1} \times (\omega^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2} \bigg|_{\omega=0.1} = 10^{\left(\frac{60}{20}\right)} \Rightarrow \frac{K \times \sqrt{(0.1)^2 + 1} \times (0.1^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{(0.1)^2} = 1000$$

$$\Rightarrow K \times 8 = 1000 \Rightarrow K = \frac{125}{2} \Rightarrow GH(s) = \frac{62.5(s+1)(s+2)^3}{s^2}$$

۱۳۷ - گزینه «۱»

تعداد صفرهای حلقه باز و حلقه بسته در سیستم‌های کنترلی با هم برابر است بنابراین در هر دو حالت الف و ب تعداد صفرهای حلقه بسته برابر ۱ است و بنابراین گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند.

حال برای هر یک از حالت‌های ۱ و ۲ با استفاده از معیار پایداری نایکوئیث تعداد قطب‌های حلقه بسته در سمت راست محور موهومی را می‌یابیم:

$$N=0 \Rightarrow P=2 \Rightarrow Z=N+P=2+0=2$$

تعداد قطب‌های حلقه باز در سمت راست محور موهومی

تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی در حالت الف برابر ۲ می‌باشد.

$$N=-2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow Z=N+P=2-2=0$$

تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی در حالت ب برابر صفر می‌باشد.

۱۳۸ - گزینه «۴»

ابتدا دیاگرام نایکوئیت را در بازه $\omega = 0$ تا $+\infty$ رسم می‌کنیم و سپس شکل حاصل را نسبت به محور حقیقی قرینه می‌کنیم و برای این منظور تابع تبدیل حلقه باز سیستم داده شده را می‌یابیم:

$$\frac{s+2}{s} = \frac{s+2}{1 + \frac{s+2}{s}} = \frac{s+2}{2s+2}$$

$$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s^2} \times \frac{s+2}{2(s+1)} = \frac{k(s+2)}{2s^2}$$

$$\angle GH = \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - 180^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0^+ \Rightarrow \angle GH = 0^+ - 180^\circ \quad (\text{کوچکتر از } -180^\circ)$$

$$\omega \rightarrow +\infty = \angle GH = 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ \quad (\text{کوچکتر از } -90^\circ \text{ مثلاً } -91^\circ)$$

با توجه به اینکه در مخرج s^2 داریم و با توجه به مسیر نایکوئیت باید از 0^- به 0^+ به اندازه دو نیم دایره (یک دایره کامل) در جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم.

۱۳۹ - گزینه «۱»

در نقطه‌ای که $|GH|=1 \Rightarrow \log |GH|=0$ است مقدار فاز $\angle GH$ کمتر از -180° است بنابراین حد فاز منفی است.
در نقطه‌ای که $\angle GH = -180^\circ$ است $\log |GH| < 0$ است بنابراین:

$$0 < |GH| < 1 \rightarrow kg = \frac{1}{|GH|} > 1$$

بنابراین حد بهره مثبت است.

اگر معادلات حالات و معادلات خروجی را به شکل زیر در نظر بگیریم، تابع تبدیل سیستم برابر است با:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{\text{لاپلاس گیری}} Sx(S) = Ax(S) + Bu(S) = (SI - A)x(S) = BU(S) \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} y = Cx + Du \xrightarrow{\text{لاپلاس گیری}} Y(S) = Cx(S) + Du(S) \end{cases} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*)} x(S) = (SI - A)^{-1}BU(S) \xrightarrow{(**)} Y(S) = c[(SI - A)^{-1}BU(S)] + DU(S)$$

$$\Rightarrow Y(S) = [C(SI - A)^{-1} + D]U(S) \Rightarrow G(S) \frac{Y(S)}{U(S)} = C(SI - A)^{-1}B + D$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } D = 0$$

$$SI - A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 1 & S+1 \end{bmatrix}$$

$$(SI - A) = S(S+1) + 1 = S^2 + S + 1 \Rightarrow (SI - A)^{-1} = \frac{1}{|SI - A|} \times \begin{bmatrix} S+1 & 1 \\ -1 & S \end{bmatrix}$$

$$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S+1}{S^2 + S + 1} & \frac{1}{S^2 + S + 1} \\ \frac{-1}{S^2 + S + 1} & \frac{S}{S^2 + S + 1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{S+1}{S^2 + S + 1} & \frac{1}{S^2 + S + 1} \\ \frac{-1}{S^2 + S + 1} & \frac{S}{S^2 + S + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{S^2 + S + 1} \\ \frac{S}{S^2 + S + 1} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{1}{S^2 + S + 1}$$

۱۴۱- گزینه «۲»

از رابطه مستقل از زمان برای سرعت و شتاب داریم:

$$v dv = a dx \Rightarrow v dv = (-kx^2) dx \rightarrow \int_{v_0}^0 v dv = -k \int_{x=0}^{x_{\max}} x^2 dx$$

$$\left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_0}^0 = -\frac{k}{3} [x^3]_0^{x_{\max}} \Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{k}{3} x_{\max}^3$$

$$k = \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{x_{\max}^3}$$

با توجه به رابطه‌ای که برای شتاب در تست داده شده است می‌توان واحد k را بدست آورد که $\left[\frac{1}{ms^2} \right]$ می‌باشد و گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

۱۴۲- گزینه «۳»

$$\begin{cases} V_P = V_B + V_{P/B} \\ V_P = V_A + V_{P/A} \end{cases} \quad (1) \rightarrow V_B + V_{P/B} = V_A + V_{P/A} \quad (2), \quad V_A = 2j, \quad V_B = 3i$$

$$V_{P/B} = \bar{V}_P (-\cos 60^\circ i + \sin 60^\circ j), \quad V_{P/A} = \bar{V}_P i$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (۲)}} \quad 3i - \frac{1}{2} \bar{V}_P i + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{V}_P j = 2j + \bar{V}_P i$$

$$\begin{cases} V_{P/B} = 2/\sqrt{3} \\ V_{P/A} = 1/\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{(1)} V_P = 2j + 1/\sqrt{3} i \rightarrow V_P = \sqrt{2^2 + 1/3} = 2/\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\sum F_n = ma_n \rightarrow -mg \cos \theta + N = m\left(\frac{-v^2}{R}\right) \quad (1)$$

هنگام ترک و جدایش گلوله از سطح، $N = 0$ (نیروی عمود وارد بر سطح) می‌شود و از رابطه انرژی داریم:

$$\Delta U = \Delta T$$

$$mgR(1 - \cos \theta) = \frac{mV^2}{R} \rightarrow V^2 = rgR(1 - \cos \theta)$$

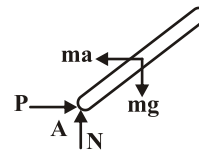
$$\xrightarrow{\text{از رابطه (۱)}} -mg \cos \theta = -\frac{mV^2}{R} = -\frac{m}{R}(rgR(1 - \cos \theta))$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{2}{3}$$

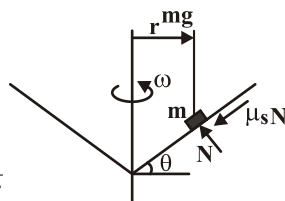
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{mgL}{2} \cos \theta - ma \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow p - ma = 0 \rightarrow p = ma = 4 \times 10 = 40 \text{ N}$$



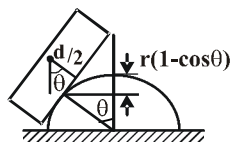
$$\Rightarrow \omega = \left[\left(\frac{g}{r} \right) \left(\frac{\mu \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$



$$\begin{cases} N \cos \theta - \mu N \sin \theta = mg \\ \mu N \cos \theta + N \sin \theta = mr\omega^2 \end{cases} \rightarrow \frac{\mu \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} = \frac{r\omega^2}{g}$$

اگر از این مقدار بیشتر باشد جسم به بیرون پرتاب می‌شود پس حداکثر مقدار ω می‌باشد.
و همچنین چون در صورت سؤال گفته شده است که ذره به بیرون پرتاب نشود باید در جهت اعمال نیروی اصطکاک $(\mu_s N)$ دقت کرد.

با انحراف سیستم به اندازه θ ، برای انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم داریم:



$$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$$

$$I_o = I_{CG} + m\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r\theta)^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} m(d^2 + L^2) + m\left(\frac{d^2}{4} + r^2 \theta^2\right) \right] \dot{\theta}^2 \Rightarrow T = \frac{m}{24} [\epsilon d^2 + L^2 + 12 r^2 \theta^2] \dot{\theta}^2$$

$$U = mg\Delta h, \quad \Delta h = \frac{d}{2} \cos \theta + r\theta \sin \theta - r(1 - \cos \theta) - \frac{d}{2} = r\theta \sin \theta - \left(r + \frac{d}{2}\right)(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{24} [\epsilon d^2 + L^2 + 12 r^2 \theta^2] \dot{\theta}^2 + mg[r\theta \sin \theta - (r + \frac{d}{2})(1 - \cos \theta)] \right] = 0$$

$$\theta^2 \dot{\theta}^2 = 0 \text{ نوسانات کوچک و } \sin \theta = \theta, \quad 1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2} \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{24} [\epsilon d^2 + L^2] \dot{\theta}^2 + mg\left(r - \frac{d}{2}\right) \frac{\theta^2}{2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{12} [\epsilon d^2 + L^2] \ddot{\theta} + mg\left(r - \frac{d}{2}\right) \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{12 g(r - \frac{d}{2})}{\epsilon d^2 + L^2}}$$

با توجه به داده‌های مساله داریم:

$$\sum M_o = 0$$

$$cL^2 \dot{\theta} + k \frac{L}{2} \theta \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2} mL^2 \ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{k}{4} \theta + \frac{m}{2} \ddot{\theta} + c\dot{\theta} = 0$$

$$C_c = 2\sqrt{km} = 2\left(\sqrt{\left(\frac{k}{4}\right)\left(\frac{m}{2}\right)}\right) = \sqrt{km}$$

انرژی پتانسیل دو سیستم برابر می‌باشد، پس انرژی‌های جنبشی را مقایسه می‌کنیم:

$$U_1 = U_2 = mgL(1 - \cos \theta)$$

$$(weld) \quad T_1 = \frac{1}{2} m(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

$$(hinge) \quad T_1 = \frac{1}{2} m(L\dot{\theta})^2$$

در نتیجه:

$$T_{weld} > T_{hinge} \Rightarrow \omega_{weld} < \omega_{hinge}$$

نکته تستی:

$$\omega_n = \frac{\text{انرژی پتانسیل}}{\text{انرژی جنبشی}} \quad \omega_n \propto \frac{1}{\text{انرژی جنبشی}}$$

روش تشریحی:

$$x(t) = A \sin(\omega_n t - \Psi) + x_o \sin(\omega t - \phi) \quad \omega_n = \omega, \omega = 10, C = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t - \Psi) + X_o \sin 10 t \\ \dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t - \Psi) + 10 X_o \cos 10 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A \sin \Psi = 0 \rightarrow \Psi = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \omega A \cos \Psi + 10 X_o = 0 \rightarrow A = -2 X_o \end{cases}$$

$$X_o = \frac{\frac{F_o}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{\frac{F_o}{k}}{1 - 4} = \frac{-F_o}{3k} \Rightarrow A = \frac{2F_o}{3k}$$

$$x(t) = \frac{2F_o}{k} \sin t - \frac{F_o}{k} \sin 10 t$$

روش تستی:

در روش تستی سریع از جاگذاری شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

۱۵۰- گزینه «۱»

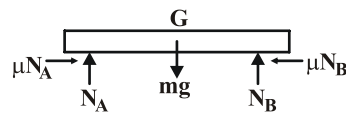
$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$\mu_k N_A - \mu_k N_B = m\ddot{x} \quad (۱)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_A + N_B = mg \quad (۲)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow aN_B - \left(\frac{a}{\gamma} + x\right)mg = 0 \quad (۳)$$

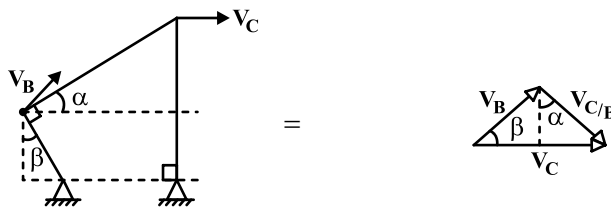


با محاسبه N_A و N_B ها از ۳ و ۲ و قرار دادن در رابطه ۱ داریم:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma \mu_k g}{a} x = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma \mu_k g}{a}}$$

۱۵۱- گزینه «۴»

$$|\vec{V}_B| = \overline{AB} \times \omega \Rightarrow$$

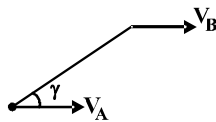


$$\frac{V_B}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{V_C}{\sin \beta} \Rightarrow V_C = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \times V_B$$

$$V_C = \overline{BC} \times \omega_{BC} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \times V_B}{\overline{BC}} = \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \times \overline{AB} \times \omega}{\overline{BC}} = \frac{1}{\gamma} \omega \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$$

۱۵۲- گزینه «۱»

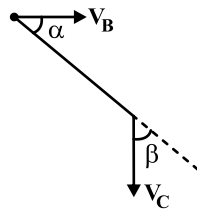
در مورد خط انتقال AB، سرعت در امتداد آن باید یکی باشد



چون امتداد سرعت هر دو چرخ‌دنده در یک امتداد هستند پس $V_B = V_A = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

در مورد خط انتقال BC و با توجه به جهت حرکت آنها خواهیم داشت

$$V_B \cos \alpha = V_C \cos \beta \Rightarrow$$



$$V_C = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \times V_B = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} \times 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$V_C = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

۱۵۳- گزینه «۴»

رابطه روبرو در این سیستم چرخ‌دنده‌ای برقرار است.

$$\frac{\omega_A - \omega_{\text{arm}}}{\omega_B - \omega_{\text{arm}}} = -\frac{N_B}{N_A}$$

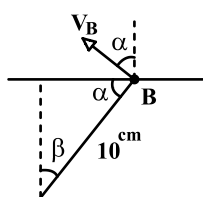
$$\frac{5 - \omega_{\text{arm}}}{2 - \omega_{\text{arm}}} = \frac{-40}{20} \Rightarrow 5 - \omega = -4 + 2\omega \Rightarrow 3\omega_{\text{arm}} = 9$$

با جایگذاری سرعت‌های زاویه‌ای در فرمول:

$$\rightarrow \omega_{\text{arm}} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

چون عدد بدست آمده مثبت است و از آنجایی که علامت جهت حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت گرفتیم پس در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند.

۱۵۴ - گزینه «۱»



$$V_B = 1 \cdot \text{cm} \times 12 = 12 \cdot \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\beta = \arcsin \frac{5}{12} \Rightarrow \beta = 3^\circ, \Rightarrow \alpha = 6^\circ$$

$$V = V_B \cos \alpha = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3}$$

۱۵۵ - گزینه «۴»

$$\begin{cases} \sum \cos \phi_i = \cos 0^\circ + \cos 45^\circ \neq 0 \\ \sum \sin \phi_i = \sin 0^\circ + \sin 45^\circ \neq 0 \end{cases}$$

برای بالانس نیروهای اولیه

$$\begin{cases} \sum \cos 2\phi_i = \cos 0^\circ + \cos 90^\circ \neq 0 \\ \sum \sin 2\phi_i = \sin 0^\circ + \sin 90^\circ \neq 0 \end{cases}$$

بالانس نیروهای ثانویه

۱۵۶ - گزینه «۲»

با توجه به اینکه اغتشاشات ورودی D_1 و D_2 در خروجی خطا ایجاد می‌کنند، بنابراین باید مجموع خروجی‌های ناشی از دو ورودی اغتشاش صفر شود. پس خروجی‌های سیستم برای D_1 و D_2 را داریم:

$$C(S) = \frac{G(S)}{1+KG(S)} D_1(S) + \frac{-KG(S)}{1+KG(S)} D_2(S)$$

$$C(S) = \frac{\frac{\alpha}{S} G(S) - \frac{\beta}{S} KG(S)}{1+KG(S)} = \frac{(\alpha - \beta k)}{S(1+KG(S))} G(S)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta k$$

برای اینکه خروجی $C(S)$ صفر شود باید:

۱۵۷- گزینه «۳»

از روش راوٹ داریم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 10 & 24 \\ s^3 & 5 & 20 & \\ s^2 & 6 & 24 & \\ s^1 & 0 & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

به سطر با درایه‌های صفر رسیدیم، بنابراین از معادلهٔ کمکی باید استفاده کنیم:

می‌توان از دو روش استفاده کرد، یکی اینکه جدول را ادامه دهیم و دیگر اینکه معادله مشخصه را به معادله کمکی تقسیم کرده و دو ریشه دیگر را بیابیم: چون متغیر علامتی نداریم و سطر صفر نداریم دو ریشه دیگر در سمت چپ محور $j\omega$ می‌باشد. \Leftarrow گزینه ۳ صحیح می‌شود.
روش دیگر:

$$\frac{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 20s + 24}{s^2 + 5s + 6}$$

$$(s^2 + 5s + 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -2 \\ s = -3 \end{cases} \rightarrow \text{دو ریشه در سمت چپ}$$

۱۵۸- گزینه «۳»

در این تست اگر تک تک و جزیه‌جزء ریشه‌ها و نمودارها را پیدا کنیم و زوایای هرکدام را محاسبه کنیم وقت بسیار طولانی می‌گیرد و تنها با توجه به شکل گزینه‌ها در می‌یابیم که اگر زاویه ورودی به صفرهای مختلط را محاسبه کنیم برای تعیین پاسخ صحیح کافی است:

$$\left. \begin{array}{l} \text{صفرها: } S_{1,2} = 0/5 \pm 0/5j \\ \text{قطبها: } S = 0, 0, 0, -4 \end{array} \right\} \theta_m = -180 - [\sum (\text{زاویه صفرها}) - \sum (\text{زاویه قطبها})] \rightarrow$$

$$\theta_m = -180 - [90 - (3 \times 135 + \tan^{-1} \frac{0/5}{(4 - 0/5)})] = -180 + 405 - 90 + 18 = 143^\circ \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

برای محاسبه X باید قسمت حقیقی تابع تبدیل را در فرکانس $\omega = 0$ تعیین کنیم:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^r + (p_1 + p_r)s^r + p_1 p_r s}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^r - (p_1 + p_r)\omega^r + p_1 p_r j\omega} = \frac{1}{-\omega^r(p_1 + p_r) + j\omega(p_1 p_r - \omega^r)} = \frac{-\omega^r(p_1 + p_r) - j\omega(p_1 p_r - \omega^r)}{\omega^r(p_1 + p_r)^r + \omega^r(p_1 p_r - \omega^r)^r}$$

$$\text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = \frac{-\omega^r(p_1 + p_r)}{\omega^r(p_1 + p_r)^r + \omega^r(p_1 p_r - \omega^r)^r} = \frac{-(p_1 + p_r)}{\omega^r(p_1 + p_r)^r + (p_1 p_r - \omega^r)^r}$$

$$\omega = 0 \rightarrow X = \text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = \frac{-(p_1 + p_r)}{(p_1 p_r)^r} \rightarrow \text{گزینه ۳}$$

اگر جابجایی فنر k_1 را X_1 و k_2 را X_2 بنامیم، معادلات حرکت را داریم:

$$f(t) - k_1(X_1 - Y) = 0 \rightarrow F(s) - k_1(X_1 - Y) = 0 \quad (1)$$

$$k_1(X_1 - Y) - k_2(Y - X_2) - B(\dot{Y} - \dot{X}_2) = 0 \rightarrow k_1(X_1 - Y) - (k_2 + BS)(Y - X_2) = 0 \quad (2)$$

$$k_2(Y - X_2) + BS(Y - X_2) - X_2 k_2 = 0 \rightarrow (k_2 + BS)Y - (k_2 + BS)X_2 - X_2 k_2 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow X_2(k_2 + k_2 + BS) = (k_2 + BS)Y \rightarrow X_2 = \frac{(k_2 + BS)Y}{(k_2 + k_2 + BS)} \quad (4)$$

$$\xrightarrow{1,2} k_1(X_1 - Y) - (k_2 + BS)Y + \frac{(k_2 + BS)(k_2 + BS)}{(k_2 + k_2 + BS)} = 0$$

$$\rightarrow X_1 = \frac{Y(k_1 k_2 + k_1 k_2 + k_1 BS + k_2 k_2 + k_2 BS)}{k_1(k_2 + k_2 + BS)} \quad (5)$$

$$\xrightarrow{5,1} F = -k_1 Y + \frac{Y(k_1 + k_2 k_2 k_1 k_2 + k_1 BS + k_2 k_2 + k_2 BS)}{k_2 + k_2 + BS}$$

$$\Rightarrow F = \frac{k_2(k_2 + BS)Y}{k_2 + k_2 + BS} \rightarrow \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{k_2 + k_2 + BS}{k_2(k_2 + BS)} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

$$v_1 = \sqrt{rgL} \quad , \quad v_2 = 0$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Rightarrow m\sqrt{rgL} + 2m \times 0 = mv'_1 + 2mv'_2$$

$$v'_1 + 2v'_2 = \sqrt{rgL} \quad (1)$$

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \Rightarrow 1 = \frac{v'_2 - v'_1}{\sqrt{rgL} - 0} \Rightarrow v'_2 - v'_1 = \sqrt{rgL} \quad (2)$$

برخورد از نوع الاستیک می باشد پس $e = 1$:

$$(1), (2) \Rightarrow v'_2 = \frac{2}{3}\sqrt{rgL}$$

۱۶۲- گزینه «۴»

$$\sum F = ma \Rightarrow -(c_1 + c_2 v^2) = ma \rightarrow a = \frac{-1}{m}(c_1 + c_2 v^2)$$

$$v dv = a ds \Rightarrow ds = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F/m} \rightarrow S = -m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{c_1 + c_2 v^2}$$

$$c_1 + c_2 v^2 = U \rightarrow 2c_2 v dv = du$$

$$s = \frac{-m}{2c_2} \ln \frac{c_1}{c_1 + c_2 v^2} = \frac{m}{2c_2} \ln \frac{c_1 + c_2 v^2}{c_1} \Rightarrow s = \frac{m}{2c_2} \ln \left(1 + \frac{c_2}{c_1} V_0^2 \right)$$

۱۶۳- گزینه «۲»

هر چقدر سختی فنر بیشتر باشد، حرکت جرم M کمتر خواهد بود و اگر $k \rightarrow \infty$ ، آنگاه سطح شیب‌دار M بصورت جسم صلب عمل می‌کند و در نتیجه انرژی جنبشی کمتری توسط انرژی پتانسیل گرانشی جذب می‌شود و انرژی جنبشی و در نتیجه سرعت جسم m بیشتر خواهد بود، پس در حالت ۲ سرعت بیشتر از حالت ۱ خواهد بود.

۱۶۴- گزینه «۳»

ابتدا از قضیه سینوس‌ها در مثلث استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\sin \theta}{x_B} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{L} \quad x_B = L \frac{\sin \theta}{\sin \beta}$$

$$\dot{x}_B = L \frac{\dot{\theta} \cos \theta}{\sin \beta} \quad ; \quad \dot{\theta} = \omega \quad ; \quad \dot{x}_B = V_B$$

$$\omega = \frac{V_B}{L} \frac{\sin \beta}{\cos \theta}$$

با مشتق‌گیری از سرعت زاویه‌ای می‌توانیم شتاب زاویه‌ای را بدست آوریم.

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{V_B}{L} \sin \beta \frac{\omega \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\alpha = \left(\frac{V_B}{L} \right)^2 \sin^2 \beta \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} = \left(\frac{V_B}{L} \right)^2 \sin^2 \beta \tan \theta (1 + \tan^2 \theta)$$

۱۶۵ - گزینه «۳»

ابتدا شتاب زاویه‌ای سقوط میله در لحظه اول را بدست می‌آوریم:

$$\sum M_o = I_o \alpha \Rightarrow mg \frac{L}{2} = \left[\frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \times \frac{g}{L}$$

سپس شتاب عمودی مرکز جرم میله:

$$a_{Gy} = \frac{L}{2} \alpha = \frac{3g}{4}$$

$$mg - F_y = ma_{Gy} \Rightarrow F_y = \frac{mg}{4}$$

معادله نیرویی در جهت عمودی:

۱۶۶ - گزینه «۴»

از روابط انرژی داریم:

$$k.E. = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (mL^2 + \frac{1}{3} ML^2) \dot{\theta}^2$$

$$P.E. = mgL(1 - \cos \theta) + Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} (k.E. + P.E.) = 0 \Rightarrow (mL^2 + \frac{ML^2}{3}) \ddot{\theta} + (m + \frac{M}{2}) gL \sin \theta = 0$$

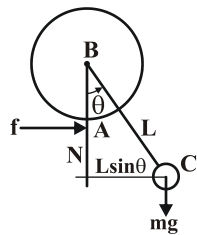
$$\omega_n = \sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}} \left(\frac{g}{L} \right)$$

در روش تستی اگر در گزینه‌ها به جای M (جرم میله) صفر قرار دهیم باید ارتعاشات پاندول ساده که $\sqrt{\frac{g}{L}}$ است بدست آید؛ که تنها گزینه ۴ صدق می‌کند.

۱۶۷- گزینه «۲»

با توجه به این که حالت a، ویسکوز می باشد پس از حالت b که اصطکاک خشک است انرژی بیشتری را جذب کرده و در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.

۱۶۸- گزینه «۱»



$$\begin{aligned}\sum T_A &= I_A \ddot{\theta} \\ -mgL \sin \theta &= I_A \ddot{\theta} \rightarrow I_A \ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0 \quad (1) \\ I_A &= md^2, \quad d^2 = L^2 + r^2 - 2Lr \cos \theta \\ I_A &= m(L^2 + r^2 - 2Lr \cos \theta)\end{aligned}$$

زاویه کوچک پس $\cos \theta = 1$ آن گاه:

$$I_A = m(L-r)^2$$

$$(1) \Rightarrow m(L-r)^2 \ddot{\theta} + mgL\theta = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{gL}{(L-r)^2}}$$

۱۶۹- گزینه «۳»

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \right) = m \dot{x}^2 + \frac{3}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + m \dot{x} r \dot{\theta}$$

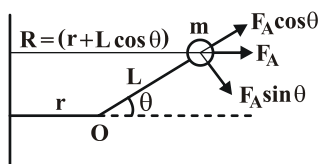
$$U = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k (x + r\theta)^2 = k x^2 + k x r \theta + \frac{1}{2} k r^2 \theta^2$$

$$T + U = m \dot{x}^2 + \frac{3}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + m \dot{x} r \dot{\theta} + k x^2 + k x r \theta + \frac{1}{2} k r^2 \theta^2$$



۱۷۰- گزینه «۳»

با توجه به داده‌های مساله داریم:



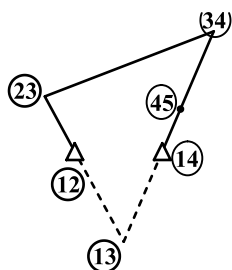
$$\begin{cases} \sum F_R = ma_R \Rightarrow \sum F_R = m(\ddot{R} - R\omega^2) = -mR\omega^2 \\ \sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow m(R\dot{\omega} + r\dot{R}\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\sum M_O = I_O \ddot{\theta} \Rightarrow -(F_R \sin \theta)L = \frac{1}{2}mL^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -(mR\omega^2)(\sin \theta)L = \frac{1}{2}mL^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{r \sin \theta}{L} \omega^2 (r + L \cos \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + r \left(\frac{r}{L} + \cos \theta \right) \omega^2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + r \left(\frac{r}{L} + 1 \right) \omega^2 \theta = 0$$

$$\omega_n = \omega \sqrt{r \left(\frac{r}{L} + 1 \right)} \quad \begin{matrix} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = \theta \end{matrix} \quad \text{زاویه کوچک}$$



۱۷۱- گزینه «۱»

مرکز آنی دوران طبق قضیه کندی محل برخورد مراکز آنی (۱۲) - (۲۳) و (۱۴) و (۳۴) می‌باشد.

پس مطابق شکل روبرو، مرکز آنی دوران ۱۳ محل برخورد امتداد عضوهای ۲ و ۴ است.

۱۷۲- گزینه «۴»

$$\frac{\omega_G}{\omega_A} = \frac{N_A \times N_C \times N_E \times N_F}{N_B \times N_D \times N_F \times N_G}$$

$$\rightarrow \frac{\omega_G}{\omega_A} = \frac{\cancel{26} \times \cancel{28} \times \cancel{34} \times \cancel{36}}{40 \times 46 \times \cancel{34} \times \cancel{36}} = \frac{13 \times \cancel{28}}{\cancel{20} \times 46} = \frac{91}{460}$$

$$\omega_G = 1200 \frac{r}{\min} \times \frac{91}{460} \approx 237 \frac{r}{\min}$$

با توجه به شکل جهت چرخ‌دنده G، هم‌جهت با A خواهد شد.

۱۷۳- گزینه «۳»

سرعت نقطه A از بادامک برابر است با:

$$V_A = V_{\text{خطی پیرو}} = 6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\text{بادامک}} = \frac{V_A}{OA} = \frac{6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{3 \text{cm}} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

۱۷۴- گزینه «۴»

شماره لنگ	ϕ	$\cos \phi$	$\sin \phi$
۱	۰	۱	۰
۲	۱۸۰	-۱	۰
۳	۱۸۰	-۱	۰
۴	۰	۱	۰

با محاسبه سری‌های زیر در مورد نیروها و گشتاورها:

$$\rightarrow \sum \cos \phi = \sum \sin \phi = 0 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \sum \cos 2\phi \neq \sum \sin 2\phi \neq 0 \quad \times \quad \sum \cos 2\phi = 4 \neq 0$$

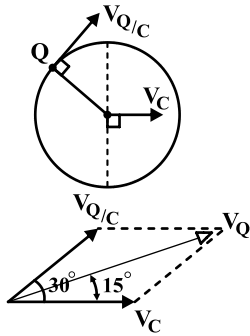
$$\rightarrow \sum a \cos \phi = \sum a \sin \phi = 0 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \sum a \cos 2\phi \neq \sum a \sin 2\phi \neq 0 \quad \times \quad \sum a \cos 2\phi = 6a \neq 0$$

ثانویه

در نهایت متوجه می‌شویم که نیروهای ثانویه و گشتاورهای ثانویه بالانس نمی‌باشند.

۱۷۵ - گزینه «۲»



$$V_C = R\omega \quad ; \quad \frac{V_Q}{C} = R\omega$$

مطابق شکل‌های ترسیم‌شده و توجه به اینکه اندازه سرعت‌های V_C و $\frac{V_Q}{C}$ یکی است پس

قطر متوازی‌الاضلاع زاویه 30° را نصف می‌کند در نتیجه زاویه بین V_C و V_Q 15° است.

۱۷۶ - گزینه «۴»

$$\frac{y_V}{y_r} = \frac{\frac{y_1}{y_2}}{\frac{y_2}{y_1}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_V}{y_1} &= \frac{G_1 G_r G_r G_f (1) + G_1 G_\Delta (1 + G_r H_r)}{\Delta} \\ \frac{y_r}{y_1} &= \frac{1(1 + G_r H_r + H_f + G_r H_r H_f)}{\Delta} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{y_V}{y_r} = \frac{G_1 G_r G_r G_f + G_1 G_\Delta (1 + G_r H_r)}{1 + G_r H_r + H_f + G_r H_r H_f}$$

۱۷۷ - گزینه «۳»

با توجه به وجود قطب ناپایدار $s = 2$ و تاثیر آن بر آغاز پاسخ که باعث ایجاد فروجهش (under shoot) می‌شود، گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست هستند.

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} = \frac{2 - s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 2 \\ 2g\omega_n = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{2} \\ g = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1 \end{cases}$$

با توجه به این که g بدست آمده پاسخ بعد از حالت گذرا فروجهش شده و گزینه ۳ صحیح می‌شود.

۱۷۸ - گزینه «۴»

شرط زاویه و اندازه را بررسی می‌کنیم.

$$\angle G(s)H(s) = -180^\circ$$

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+as+b)} \quad s = -1+j \rightarrow \angle G(s)H(s) = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle \left[\frac{1}{j[b-a+(a-r)j]} \right] = -180^\circ \rightarrow [90^\circ + \tan^{-1} \frac{a-r}{b-a}] = 180^\circ$$

$$\rightarrow \tan^{-1} \frac{a-r}{b-a} = 90^\circ \rightarrow b=a:$$

گزینه ۳ یا ۴ صحیح است

$$|GH|_{j=-1+j} = 1 \rightarrow \left| \frac{1}{j[b-a+(a-r)j]} \right| = 1 \rightarrow \sqrt{(b-a)^2 + (a-r)^2} = 1$$

۱۷۹ - گزینه «۳»

با اعمال ورودی سیستم داریم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-[k_1 k_2]x) \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$$

$$\text{معادله مشخصه: } |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -(1-k_1) & s+k_2 \end{vmatrix} = s(s+k_2) - (1-k_1) = 0$$

$$: \omega_n = 1 \text{ و } g = 0.5$$

$$s^2 + k_2 s + (k_1 - 1) \equiv s^2 + 2g\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2 \times 0.5 \times 1 \times s + 1^2$$

$$\begin{cases} k_2 = 1 \\ k_1 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۱۸۰- گزینه «۳»

در گزینه ۱ پاسخ‌گذاری سیستم تغییر نمی‌یابد و رفتار خطای آن بهبود می‌یابد.

در گزینه ۲ پاسخ‌دهی افزایش می‌یابد.

گزینه ۳ صحیح می‌باشد زیرا به علت تزریق فاز منفی توسط جبران کننده حد فاز سیستم کاهش می‌یابد.

در گزینه ۴ بیشترین فراجش کمتر می‌گردد.

۱۸۱- گزینه «۴»

$$V_o = 72 \frac{\text{km}}{\text{hr}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

بدون قفل شدگی چرخ‌ها:

$$\Sigma F_x = \mu w \Rightarrow a = \mu g$$

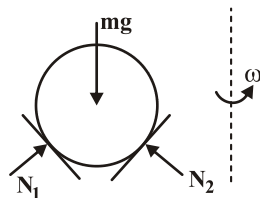
$$V^2 - V_o^2 = 2ax \rightarrow X_{\min} = \frac{V_o^2}{2a} \Rightarrow X_{\min} = \frac{20^2}{2 \times 1 \times 10} = 20 \text{ m}$$

در حالت قفل شدگی چرخ‌ها:

$$V^2 - V_o^2 = 2ax \Rightarrow X_{\text{locked}} = \frac{20^2}{2 \times 0.4 \times 10} = 50 \text{ m}$$

$$\frac{X_{\min}}{X_{\text{locked}}} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0.4 \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

۱۸۲ - گزینه «۴»



$$\omega = 30 \times \frac{\pi}{60} = \pi$$

$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0 & (N_1 + N_2) \cos 30^\circ = mg \\ \Sigma F_x = 0 \rightarrow (N_1 - N_2) \sin 30^\circ = mr\omega^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 + N_2 = \frac{40}{\cos 30^\circ} \\ N_1 - N_2 = \frac{9}{\sin 30^\circ} \end{cases}$$

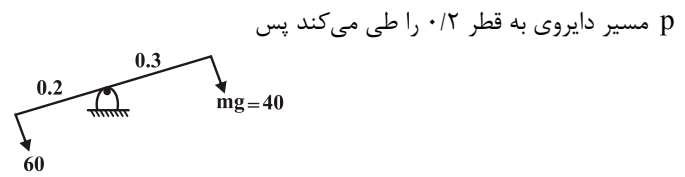
$$2N_1 = \frac{40}{\cos 30^\circ} + 18 \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 34 \text{ N} \\ N_2 = 16 \text{ N} \end{cases} \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

$$U = \Delta T \Rightarrow p \times d_1 - mg \times d_2 = \frac{1}{2} mv^2$$

$$d_1 = 0.2 \times \frac{\pi}{2} = 0.1\pi$$

$$d_2 = 0.3$$

$$\Rightarrow 60 \times 0.1\pi - 40 \times 0.3 = \frac{1}{2} v^2 \rightarrow v = \sqrt{3} \frac{m}{s}$$



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \rightarrow v_1 = v'_1 + v'_2 \quad (1)$$

از قانون پایداری اندازه حرکت داریم:

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = 0 \Rightarrow v'_2 = v'_1 \quad (2)$$

با توجه به این که برخورد پلاستیک فرض شده ($e = 0$) داریم:

$$\xrightarrow{1,2} v'_1 = \frac{v_1}{2}, \quad v'_2 = \frac{v_1}{2} \quad (3)$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}, \quad v'_1 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gL(1 - \cos\beta)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \sqrt{2gL(1 - \cos\beta)} = \frac{\sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}}{2} \rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\theta - 1}{4} + 1$$

$$x = \frac{FL^3}{3EI} \rightarrow F = \frac{3EI}{L^3} x \Rightarrow k_b = \frac{3EI}{L^3}$$

$$k_b = \frac{3EI}{\alpha^3 L^3}$$

به جای L مقدار αL را قرار می‌دهیم.

از قانون بقای انرژی داریم:

$$k.E = p.E \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} k_b x^2, \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$m(2gh) = \frac{3EI}{\alpha^3 L^3} X^2 \Rightarrow X = \sqrt{\frac{2mgh\alpha^3 L^3}{3EI}}$$

۱۸۶ - گزینه «۳»

$$m\ddot{x} = \sum F_x$$

$$(LAp)\ddot{x} = -\gamma(Ax\rho g)$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma g}{L}x = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma g}{L}}$$

۱۸۷ - گزینه «۳»

با توجه به نمودارهای اختلاف فاز، دامنه و ضریب بزرگنمایی بر اساس $\frac{\omega}{\omega_n}$ می‌توان گزینه ۳ را انتخاب کرد زیرا در صورتی که $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ باشد اختلاف فاز

با افزایش میرایی زیاد می‌شود.

در مورد گزینه ۲ نیز داریم:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \text{تشدید} \quad \text{ماکزیمم دامنه}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2} \leq 1 \quad \text{محل ماکزیمم منحنی}$$

برای حل از روش انرژی داریم:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

چون مسئله را نسبت به انتهای میله که به فنر وصل است حل می‌کنیم لذا حرکت انتقالی نداریم پس:

$$\frac{1}{2}mV^2 = 0$$

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}mb^2\right]\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mb^2\left[\frac{V}{b}\right] + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow E = \frac{1}{6}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}mV\ddot{x} + kVx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{3k}{m}x = 0$$

در نتیجه:

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3K}}$$

فرکانس‌های طبیعی یک تار برابرند با:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{و} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

که T ضریب کشسانی تار و ρ چگالی تار بر واحد طول و برای مودهای ارتعاشی داریم:

$$f_n = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

فرکانس‌های طبیعی یک تیر دو سر لولا برابرند با:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} \quad \text{و} \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

که در آن E مدول الاستیسیته و I ممان مقطع و ρ چگالی تیر بر واحد طول می‌باشد و برای مودها داریم:

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

سپس مودها یکسان و فرکانس‌ها متفاوت می‌باشند.

۱۹۰- گزینه «۱»

برای این که سیستم دی کوپله شود باید گشتاورهای ناشی از جابجایی فنرها حول مرکز نشان داده شده صفر شود پس داریم:

$$k_1 \times 3L = k_2 L \Rightarrow k_1 = \frac{k_2}{3}$$

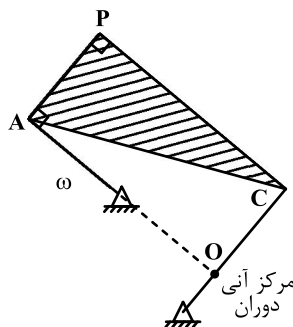
۱۹۱- گزینه «۳»

$$DOF = 3(n-1) - 2f_1 - f_2$$

که تعداد اعضاها $n = 6$ است، تعداد اتصالات f_1 برابر با ۵ تا و تعداد اتصالات برابر ۲ است پس:

$$DOF = 3(6-1) - 2(5) - 2 = 15 - 10 - 2 = 3$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۱۹۲- گزینه «۳»

$$\text{قطر مستطیل نشان داده شده} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{V_P}{\text{قطر مستطیل}} = \frac{V_A}{\text{ضلع بزرگ مستطیل}} = \frac{V_P}{OP} = \frac{V_A}{OA}$$

$$\rightarrow V_P = \frac{OP}{OA} \times V_A = \frac{5}{4} \times 8 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \Rightarrow V_P = 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

۱۹۳- گزینه «۴»

$$\frac{\omega_2 - \omega_6}{\omega_5 - \omega_6} = -\frac{N_3 N_5}{N_2 N_4} = -\frac{45 \times 48}{120 \times 18} = -1$$

با توجه به شکل داریم:

$$\rightarrow \frac{500 - \omega_6}{300 - \omega_6} = -1 \Rightarrow 500 - \omega_6 = \omega_6 - 300$$

$$\Rightarrow 2\omega_6 = 800 \rightarrow \omega_6 = 400 \text{ rpm CCW}$$

۱۹۴ - گزینه «۳»

$$\sum \cos \phi = \sum \sin \phi = 0$$

$$\sum \cos 2\phi = \sum \sin 2\phi = 0$$

$$\sum a \cos \phi \neq \sum a \sin \phi \neq 0$$

$$\sum a \cos 2\phi = \sum a \sin 2\phi \neq 0$$

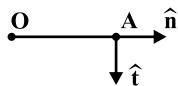
نیروهای اولیه بالانس می‌باشد.

نیروهای ثانویه بالانس می‌باشد.

گشتاور اولیه بالانس نمی‌باشد.

گشتاور ثانویه بالانس می‌باشد.

۱۹۵ - گزینه «۲»



$$a_{\frac{A}{O}} = -\overline{AO} \omega^2 \hat{n} + \overline{AO} \alpha \hat{t} = -4 \cdot \hat{i} + 1 \cdot \hat{j}$$

$$\hat{n} = \hat{i} \quad , \quad \hat{t} = -\hat{j} \Rightarrow a_{\frac{A}{O}} = -1 \cdot \omega^2 \hat{i} - 1 \cdot \alpha \hat{j} = -4 \cdot \hat{i} + 1 \cdot \hat{j}$$

$$\rightarrow a = \begin{cases} -1 \cdot \omega^2 = -4 \rightarrow \omega^2 = 4 \rightarrow \omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ -1 \cdot \alpha = 1 \rightarrow \alpha = -1 \rightarrow \alpha = -1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$a_o = r\alpha \hat{i} - r\omega^2 \hat{j} = -1 \cdot \hat{i} - 4 \cdot \hat{j}$$

۱۹۶ - گزینه «۳»

نمودار با شیب $20 \frac{db}{dec}$ شروع شده است، بنابراین یک صفر در مبدا داریم، شیب در ω_1 صفر شده و در ω برابر $-40 \frac{db}{dec}$ شده بنابراین یک قطب در ω_1 و یک قطب مضاعف در $\omega = \omega_1$ داریم. پس:

$$g(s) = \frac{ks}{(1 + \frac{1}{\omega_1}s)(1 + \frac{1}{\omega}s)^2}$$

با توجه به معادله خط لگاریتمی داریم:

$$X = X_o + m \log \frac{\omega}{\omega_o} \rightarrow 12 = 0 + 2 \log \frac{\omega_1}{0.5} \rightarrow \omega_1 = 2$$

حال برای پیدا کردن ضریب بهره k یکی از نقاط مشخص نمودار را در تابع تبدیل جایگذاری می کنیم:

$$20 \log g(j\omega)_{\omega=0.5} = 0 \text{ dB} \rightarrow |g(j\omega)_{\omega=0.5}| = 1 \rightarrow \left| \frac{k(0.5j)}{(1 + 0.5/2j)(1 + 0.5/j)^2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow k=2 \rightarrow g(s) = \frac{2s}{(1 + 0.5s)(1 + 0.25s)^2}$$

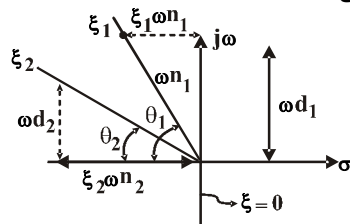
۱۹۷ - گزینه «۲»

با توجه به منحنی نایکوئیست داریم:

$$C_{ss} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{G(0)}{1 + G(0)} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۱۹۸ - گزینه «۴»

رابطه بین ریشه‌های معادله مشخصه و ω_n و ω_d برای یک سیستم مرتبه دو در صفحه تصویر زیر می باشد:



$$\xi = \cos \theta, \quad \xi_2 > \xi_1, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

پس با توجه به شکل سوال داریم:

$$\omega_n = \frac{1}{\cos 45} = \sqrt{2}$$

اگر ω_n را شعاع دایره در نظر بگیریم، تمامی نقاطی که در ناحیه هاشور خورده می‌باشند دارای $\omega_n < \sqrt{2}$ هستند. نواحی هاشور خورده دارای $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشند.

$$\xi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۴ صحیح است $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega_n \leq \sqrt{2}$

پس:

۱۹۹ - گزینه «۳»

طبق فرمول تابع تبدیل داریم:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

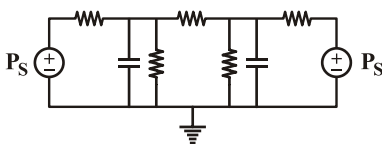
$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{(s+2)(s-1)}$$

روش تستی: با توجه به اینکه معادله مشخصه سیستم باید در مخرج باشد باید معادله مشخصه را تنها حساب کرد که در این صورت تنها گزینه ۳ را شامل می‌شود.

۲۰۰ - گزینه «۴»

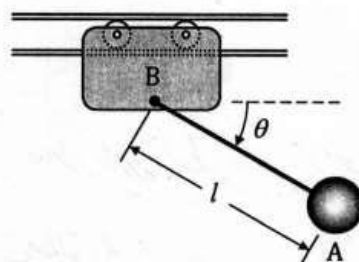
فشار \equiv پتانسیل ، (لوله، شیر) $R \leftrightarrow R$ (مقاومت) ، دبی \equiv جریان الکتریکی ، مخزن $C \equiv A$ (خازن)

پس داریم:



دینامیک و ارتعاشات

- ۱- پاندول ساده A به طول l و جرم ذره‌ای، به گاری B که در راه‌گاه افقی حرکت می‌کند، متصل شده است. مجموعه از حالت سکون در $\theta = 0^\circ$ رها می‌شود. اگر جرم‌های A و B یکسان و برابر m باشند، سرعت زاویه‌ای ریسمان پاندول در $\theta = 90^\circ$ چند برابر $\sqrt{g/l}$ است؟ (g شتاب جاذبه است).



- (۱) صفر
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) ۲

- ۲- دوچرخه‌سواری که با سرعت ۱۵ مایل بر ساعت در حرکت است، از ترمز چرخ جلو برای توقف استفاده می‌کند. او امیدوار است که با این عمل به سمت جلو پرتاب نگردد. کوتاهترین مسافت ایمن برای ایست کامل به طوری که چرخ عقب تماس خود را با زمین قطع نکند، چند فوت است؟ (یک مایل برابر ۵۲۸۰×۶۰ فوت و شدت جاذبه برابر $۳۲/۲$ فوت بر مجذور ثانیه می‌باشند.)

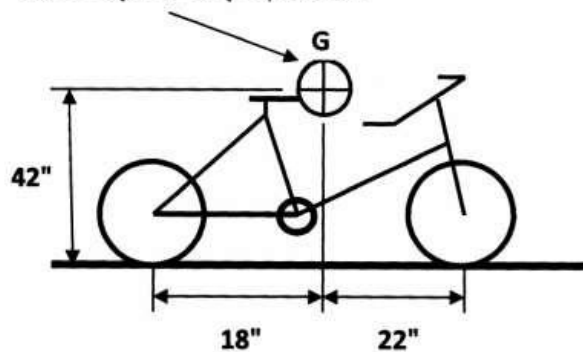
(۱) $۸/۴۵$

(۲) $۱۰/۵$

(۳) $۱۴/۳۵$

(۴) $۱۶/۷$

مرکز جرم دوچرخه و دوچرخه سوار



- ۳- در دینامیک اجسام صلب لنگر حرکتی H_c معمولاً نسبت به مرکز جرم و دستگاهی که به جسم در این نقطه نصب شده است، محاسبه می‌شود. اگر M_c لنگر نیروهای خارجی نسبت به این نقطه باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $M_c = \left[\frac{d}{dt} H_c \right]$ دستگاه مطلق

(۲) $M_c = \left[\frac{d}{dt} H_c \right] + \omega \times H_c$ دستگاه متحرک

(۳) $M_c = \left[\frac{d}{dt} H_c \right] + H_c \times \omega$ دستگاه متحرک

(۴) هیچ کدام

- ۴- زنجیری به جرم m و به طول L طوری نگهداری شده است که انتهای تحتانی آن با زمین در تماس است. نیروی عکس‌العمل زمین بعد از آنکه زنجیر به اندازه x سقوط کرده، چقدر است؟

(۱) $mg \frac{x}{L}$

(۲) $2mg \frac{x}{L}$

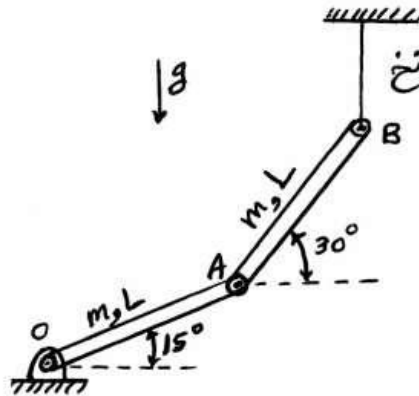
(۳) $3mg \frac{x}{L}$

(۴) $4mg \frac{x}{L}$

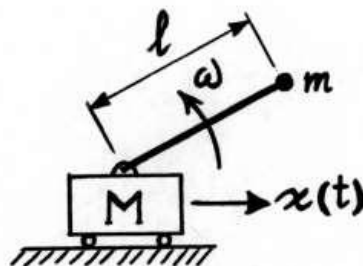


- ۵- در شکل زیر، در لحظه‌ای که نخ پاره می‌شود، $V_B = 0.1 \frac{m}{s}$ و در امتداد قائم به سمت پایین می‌باشد. سرعت زاویه‌ای میله OA در همین لحظه چند رادیان بر ثانیه است؟ ($L = 0.6 m$, $\sin 15^\circ = 0.259$)

- (۱) ۰/۵
(۲) ۰/۳۲
(۳) ۰/۲۵
(۴) ۰/۱۶۷

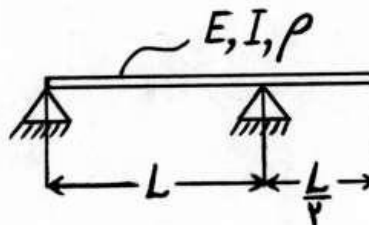


- ۶- معادله حرکت سیستم زیر در جهت x کدام است؟ (ω ثابت فرض شود).



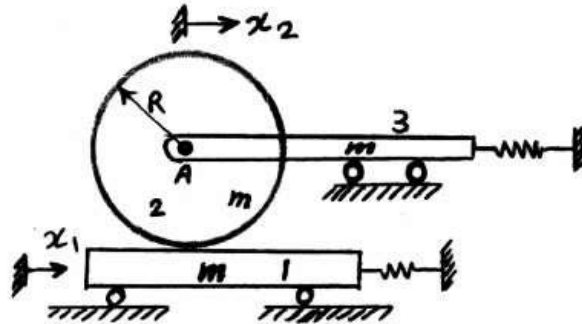
- (۱) $\ddot{x} = l\omega^2 \cos \omega t$
(۲) $\ddot{x} = l\omega^2 \cos \omega t$
(۳) $M\ddot{x} = ml\omega^2 \cos \omega t$
(۴) $(M+m)\ddot{x} = ml\omega^2 \cos \omega t$

- ۷- برای تعیین فرکانس اول تیر زیر با استفاده از روش ریلی، کدام جواب برای شکل مود اول مناسب است؟ (فرض کنید y_t تغییر مکان نقطه وسط بین دو تکیه‌گاه باشد).



- (۱) $y = \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right) y_t$
(۲) $y = \left(\frac{3x^2 L - x^3}{2L^3} \right) y_t$
(۳) $y = \left[\frac{3x}{L} - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] y_t$
(۴) $y = \left[\frac{4\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{L^2} - 1 \right] y_t$

- ۸- در سیستم ارتعاشی زیر، دیسک ۲ با توزیع جرم یکنواخت و شعاع R بر روی قطعه ۱ بدون لغزش می‌غلتد. جرم دیسک ۲ و قطعات ۱ و ۳ برابر m است. اگر x_1 و x_2 به ترتیب جابه‌جایی مطلق قطعه ۱ و لولای A باشند، انرژی جنبشی سیستم کدام است؟



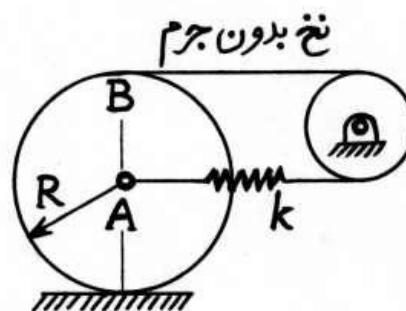
$$\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_2^2 \quad (1)$$

$$m \dot{x}_1^2 + \frac{3}{2} m \dot{x}_2^2 - m \dot{x}_1 \dot{x}_2 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} m \dot{x}_1^2 + \frac{5}{4} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_1 \dot{x}_2 \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} m \dot{x}_1^2 + \frac{7}{4} m \dot{x}_2^2 - \frac{3}{2} m \dot{x}_1 \dot{x}_2 \quad (4)$$

- ۹- مرکز دیسک همگنی به جرم m و شعاع R به فنر k و نقطه B بالای آن به نخ بدون جرم متصل است. نخ فوق پس از چرخیدن نیم دور بدور قرقره بدون جرم سمت راست به فنر متصل شده است. فرکانس طبیعی سیستم، در صورتی که حرکت دیسک روی زمین غلتش ناب باشد، کدام است؟



$$\sqrt{\frac{6k}{m}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad (3)$$

$$3\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (4)$$

- ۱۰- در سیستم ارتعاشی خطی یک درجه آزادی زیر میرا با افزایش جرم عضو ذخیره-کننده انرژی جنبشی، فرکانس طبیعی چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) کاهش می‌یابد.

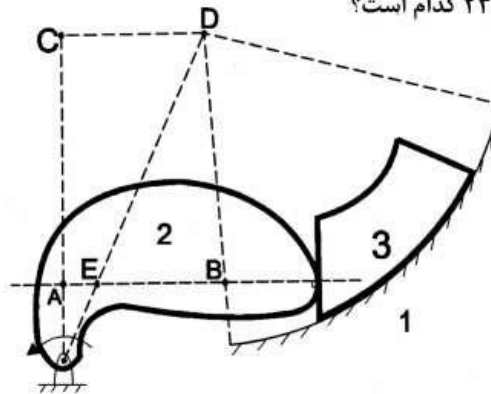
(۲) تغییری نمی‌کند.

(۳) افزایش می‌یابد.

(۴) علاوه بر جرم عضو ذخیره‌کننده انرژی جنبشی به سایر مشخصات سیستم نیز بستگی دارد.

۱۱- در شکل زیر، لغزنده ۳ روی سطح دایروی به مرکز D می لغزد و با بادامک ۲ در

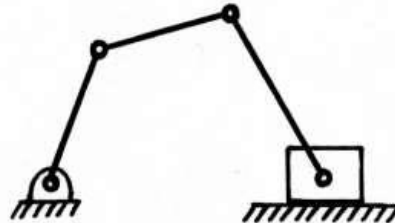
تماس است. مرکز آنی دوران ۲۳ کدام است؟



- (۱) نقطه A
- (۲) نقطه B
- (۳) نقطه D
- (۴) نقطه E

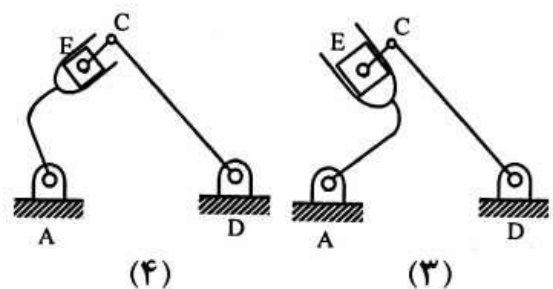
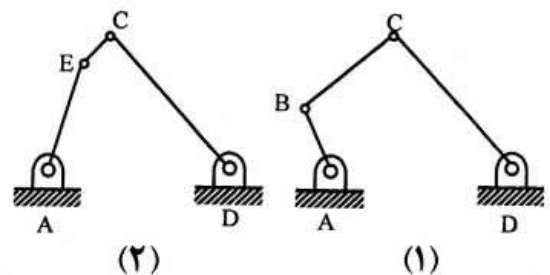
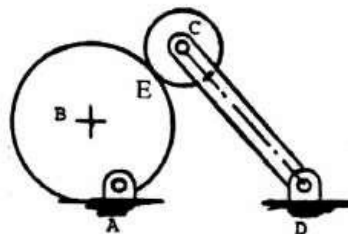
۱۲- مکانیزم مقابل دارای تعداد مرکز آنی دوران بوده و محل آن‌ها

را می توان تعیین کرد.

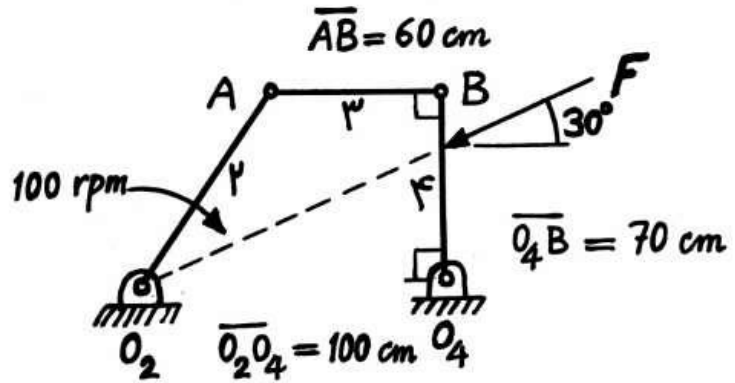


- (۱) ۶ - تمامی
- (۲) ۶ - بعضی از
- (۳) ۱۰ - تمامی
- (۴) ۱۰ - بعضی از

۱۳- کدام مکانیزم با مکانیزم روبه‌رو معادل است؟



- ۱۴- در مکانیزم زیر نیروی $F = 10^5 \text{ N}$ به رابط ۴ وارد می‌شود. برای مقابله با این نیرو، توان روی محور رابط ۲ تقریباً چند کیلووات است؟ (سرعت دوران ۲ را معادل 100 rpm در نظر بگیرید.)



۱۰۰۰ (۲)

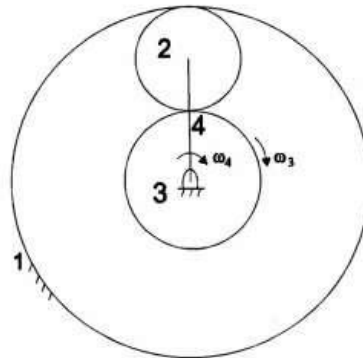
۵۰۰ (۱)

10^6 (۴)

10^5 (۳)

- ۱۵- در شکل زیر، چرخ دنده ۱ ثابت است. تعداد دندانه‌های چرخ دنده‌های ۲ و ۳ به ترتیب N_2 و N_3 می‌باشد. نسبت سرعت زاویه‌ای چرخ دنده ۳ به سرعت زاویه‌ای بازوی ۴،

$\frac{\omega_3}{\omega_4}$ چقدر است؟



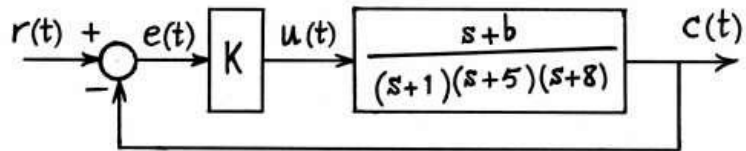
$1 - \frac{N_2}{N_3}$ (۱)

$1 + \frac{N_2}{N_3}$ (۲)

$2(1 + \frac{N_2}{N_3})$ (۳)

$2(1 - \frac{N_2}{N_3})$ (۴)

- ۱۶- در سیستم زیر کدام پاسخ صحیح است؟ ($r(t)$ ورودی مبنای پله‌ای واحد، b حقیقی و بزرگتر از صفر و K کمیتی مثبت و محدود است.)



- (۱) می‌توان بهره کنترل کننده را طوری تعیین کرد که خطای حالت ماندگار صفر شود.
 (۲) می‌توان پارامتر b را طوری تعیین کرد که سیستم مدار بسته برای همه مقادیر K پایدار باشد.
 (۳) به ازای همه مقادیر b و K ، سیستم مدار بسته دارای دو قطب مسلط مختلط مزدوج است.
 (۴) عکس‌العمل سیستم مدار باز به ازای $K=1$ و پله‌ای واحد نهایتاً مساوی واحد می‌شود.

- ۱۷- در یک سیستم خطی با معادله حالت زیر و شرایط اولیه صفر، به ازای ورودی پله واحد مقدار $y(t)$ در حالت پایا (y_{ss}) چقدر است؟

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{x} \end{cases}$$

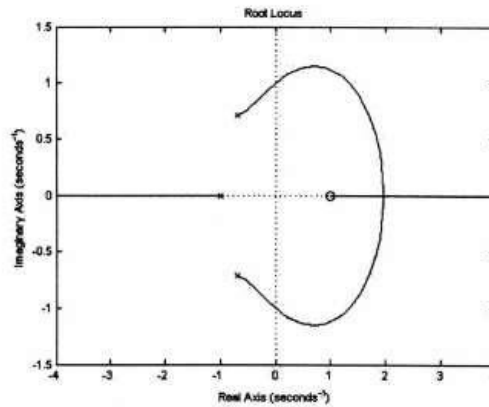
$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۱۸- مکان هندسی زیر مربوط به سیستم با تابع تبدیل حلقه باز و فیدبک می باشد.



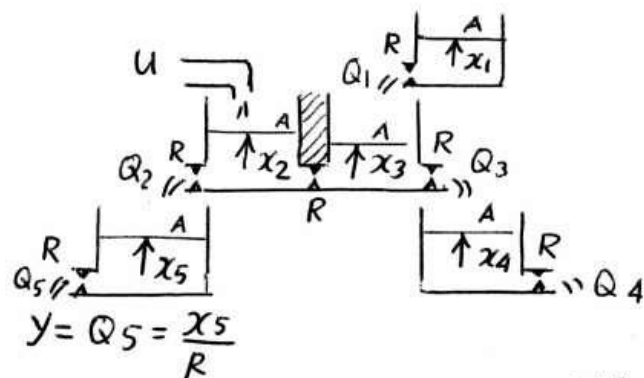
(۱) غیرمینیم فاز - $\frac{s-1}{(s+1)(s^2+1/4s+1)}$ - منفی

(۲) غیرمینیم فاز - $\frac{s-1}{(s+1)(s^2+1/4s+1)}$ - مثبت

(۳) مینیم فاز - $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1/4s+1)}$ - مثبت

(۴) مینیم فاز - $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1/4s+1)}$ - منفی

۱۹- با فرض خطی بودن دبی خروجی از ظرف های سیستم مقابل همه سطح مقطع ها مساوی هم و برابر با $A=1$ و همه مقاومت های شیرهای خروجی $R=1$ است. تابع تبدیل این سیستم کدام است؟



(۱) $\frac{s+2}{(s+1)(s+3)^2}$

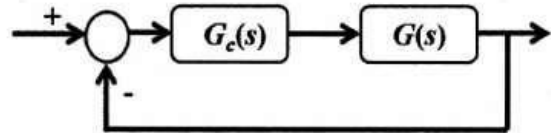
(۲) $\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$

(۳) $\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}$

(۴) $\frac{1}{(s+1)(s+3)^2}$

۲۰- سیستم حلقه بسته زیر در چه صورت پایدار است؟

$$\begin{cases} G(s) = \frac{1}{(s-a)(s+b)} \\ G_c(s) = k(s+c) \\ a, b, c, k > 0 \end{cases}$$



$$k > \min \left\{ a - b, \frac{ab}{c} \right\} \quad (۲)$$

$$k > \max \left\{ a - b, \frac{ab}{c} \right\} \quad (۱)$$

$$k < \max \left\{ a - b, \frac{ab}{c} \right\} \quad (۴)$$

$$k < \min \left\{ a - b, \frac{ab}{c} \right\} \quad (۳)$$

پاسخ تشریحی

۱. گزینه ۴ درست است.

$$m_A = m_B = m$$

انرژی کل (جنبشی + پتانسیل) به علت پایداری انرژی در حالت $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ با یکدیگر برابر است بنابراین

$$E_1 = E_2 \Rightarrow V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

اگر سطح انرژی پتانسیل را در حالت $\theta = 90^\circ$ هم ارتفاع با جرم A در نظر بگیریم داریم:

$$V_1 = m_A g \ell + m_B g \ell, \quad T_1 = 0 + 0$$

و

$$V_2 = 0 + m_B g \ell, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$$

$$\Rightarrow m_A g \ell = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 \Rightarrow mg \ell = \frac{1}{2} (m) (V_A^2 + V_B^2) \quad (I)$$

با توجه به این که در راستای افقی نیروی خارجی به سیستم اعمال نمی‌گردد بنابراین مرکز جرم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و به تبع آن سرعت آن نیز صفر است بنابراین

$$m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B = 0 \Rightarrow m_A \vec{V}_A = -m_B \vec{V}_B \Rightarrow \vec{V}_A = -\vec{V}_B \Rightarrow |\vec{V}_A| = |\vec{V}_B| = V \quad (II)$$

بنابراین رابطه (I) به صورت زیر درخواهد آمد.

$$mg \ell = \frac{1}{2} (m) (2V^2) \Rightarrow V^2 = g \ell \Rightarrow V = \sqrt{g \ell} \quad (III)$$

اکنون رابطه سرعت نسبی بین جرم‌های A و B را می‌نویسیم.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}, \quad \vec{V}_A = -\vec{V}_B \quad (II), \quad V_{A/B} = \omega \ell$$

$$\Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_B + \omega \ell \Rightarrow V = -V + \omega \ell \Rightarrow 2V = \omega \ell$$

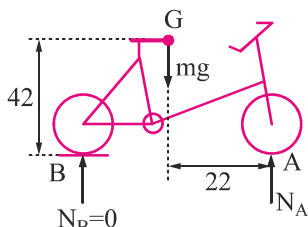
$$\left. \begin{array}{l} 2V = \omega \ell \\ III \rightarrow V = \sqrt{g \ell} \end{array} \right\} 2\sqrt{g \ell} = \omega \ell \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}} \rightarrow \text{گزینه ۴ درست است}$$

۲. گزینه ۳ درست است.

برای آن که کوتاه‌ترین فاصله را به دست آوریم درحالی که ایمن نیز باشد باید چرخ عقب را در آستانه جداسدن از سطح زمین در نظر بگیریم بنابراین نمودار جسم آزاد سیستم به صورت زیر خواهد بود.

فرض می‌کنیم که شتاب دوچرخه برابر a_G و طبقاً به سمت عقب (چپ) باشد بنابراین داریم:

$$\sum M_A = I_G \ddot{\theta} + m a_G d \quad I$$



دوچرخه را در آستانه جداسدن چرخ عقب از سطح زمین در نظر گرفتیم و فرض کردیم که ایمن باشد یعنی $\ddot{\theta} = 0$ بنابراین:

$$I \Rightarrow mg(22) = 0 + m a_G (42) \Rightarrow a_G = \frac{22}{42} g$$

برای سرعت دوچرخه داریم:

$$v_0 = 15 \text{ mph} \Rightarrow v_0 = 15 \times 88 \times 60 = 79200 \frac{\text{ft}}{\text{h}} \Rightarrow v_0 = \frac{79200}{3600} = 22 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

اکنون داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2 a_G x \Rightarrow 0 - 22^2 = 2 \left(-\frac{22}{42} g \right) x \Rightarrow x = \frac{462}{g}, \quad g = 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \Rightarrow x = 14.35 \text{ ft}$$

۳. گزینه ۲ درست است.

مشتق کل یک کمیت برداری (که در دستگاه دورانی تعریف شده است) نسبت به دستگاه لخت برابر است با مشتق آن در دستگاه دورانی به علاوه ضرب برداری سرعت دورانی دستگاه نسبی در آن کمیت برداری برای مثال اگر دستگاه نسبی که سرعت دورانی دارد $x-y$ و دستگاه لخت را با $X-Y$ نشان دهیم برای سرعت داریم:

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{X-Y} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{x-y} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

برای لنگر حرکتی نیز چنین است بنابراین:

$$\left(\frac{dH_C}{dt} \right)_{X-Y} = M_C = \left(\frac{dH_C}{dt} \right)_{x-y} + \vec{\omega} \times \vec{H}_C$$

↓
دستگاه متحرک

۴. گزینه ۳ درست است.

سرعت زنجیر پس از آن که به اندازه x سقوط کند برابر است با:

$$V = \sqrt{2gx}$$

نیروی عکس‌العمل زمین از دو بخش تشکیل می‌گردد

(۱) نیروی وزن زنجیر قرار گرفته روی زمین به طول x و (۲) نیروی ناشی از مومنتم ورودی ناشی از سقوط زنجیر

چگالی زنجیر را می‌توان برابر با p در نظر گرفت که در آن

(۱) نیروی وزن زنجیر قرار گرفته روی زمین به طول x

$$\rho = \frac{m}{L}$$

بنابراین وزن طول x از زنجیر عبارت است از

$$F_1 = \rho x g$$

(۱) نیروی ناشی از مومنتم سقوط زنجیر

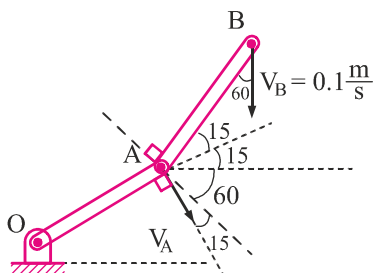
$$F_2 = \frac{dm}{dt} V = \frac{\rho dx}{dt} V = \rho V^2 = \rho (\sqrt{2gx})^2 = 2\rho gx$$

نیروی عکس‌العمل زمین مجموع این دو نیرو است بنابراین

$$F = F_1 + F_2 = \rho gx + 2\rho gx = 3\rho gx = 3 \frac{m}{L} gx = 3mg \frac{x}{L} \rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۵. گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم که V_A عمود بر میله OA است.



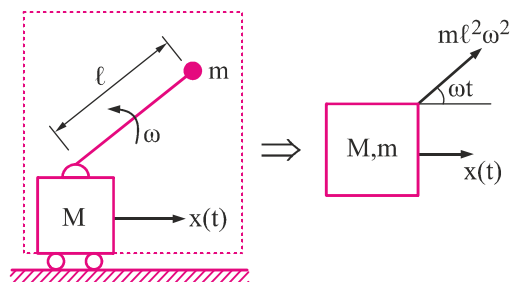
با توجه به این که میله AB صلب است بنابراین باید مولفه V_B در راستای میله AB با مؤلفه V_A در راستای میله AB برابر باشد تا میله صلب فشرده یا کشیده نشود (وگرنه دیگر صلب نیست) بنابراین:

$$V_B \cos 60 = V_A \sin 15 \Rightarrow 0.1 \times \frac{1}{2} = V_A (0.259) \Rightarrow V_A = 0.193 \frac{m}{s}$$

سرعت زاویه‌ای میله OA نیز برابر است با:

$$\omega_{OA} = \frac{V_A}{L} = \frac{0.193}{0.6} = 0.32 \frac{rad}{s} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۶. گزینه ۴ درست است.



$$\sum f_x = ma \Rightarrow m\ell^2\omega^2 \cos(\omega t) = (m+M)\ddot{x}$$

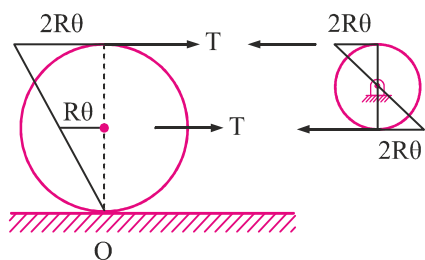
۷. گزینه ۴ درست است.

در روش ریلی شکل مود باید به گونه‌ای انتخاب شود که شرایط مرزی هندسی ارضا شود. در این سؤال تنها گزینه ۴ شرایط مرزی $y(0) = y(\ell) = 0$ را برقرار می‌کند.

۸. گزینه ۳ درست است.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 \right) \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{R} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2 \\ &= \frac{3}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{5}{4}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2 \end{aligned}$$

۹. گزینه ۱ درست است.



$$T = k(R\theta + 2R\theta) = 3kR\theta$$

$$\sum M_O = I_O \ddot{\theta} \Rightarrow -TR - T(2R) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + 3TR = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + 9kR^2\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{9kR^2}{\frac{3}{2}mR^2}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

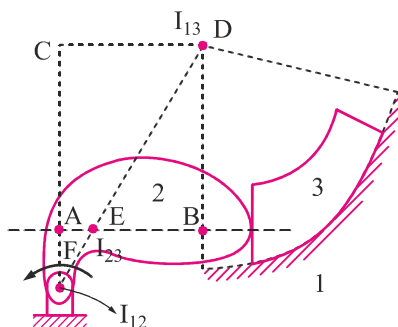
۱۰. گزینه ۱ درست است.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = \frac{k}{m} \\ 2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \end{cases}$$

$$m \uparrow \Rightarrow \begin{cases} \omega_n \downarrow \\ \xi \downarrow \end{cases}$$

۱۱. گزینه ۴ درست است.



طبق قضیه کندی مراکز آنی I_{12} و I_{13} و I_{23} روی یک خط قرار دارند. در مرکز انحنا مسیری است که لغزنده ۳ روی آن می‌لغزد یعنی نقطه D ، I_{12} در محلی است که میله ۲ به زمین پین شده است.

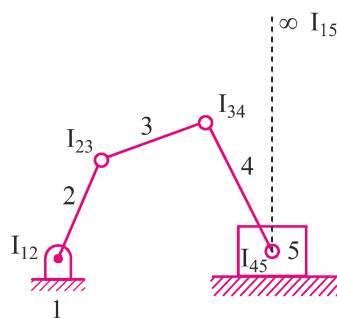
بنابراین مرکز آنی I_{23} روی خط واصل این دو نقطه است (خط FD) از طرفی می‌دانیم مرکز آنی روی خط عمود مشترک دو جسمی است که نسبت به یکدیگر می‌لغزند یعنی روی خط AB واقع شده است.

بنابراین I_{23} از محل تقاطع خطوط FD و AB به دست می‌آید که نقطه E است.

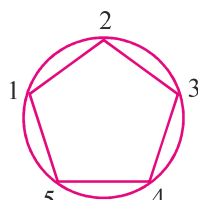
۱۲. گزینه ۴ درست است.

سیستم به n تعداد $N = \frac{n(n-1)}{2}$ مرکز آنی دوران دارد که در آن n تعداد لینک‌ها است بنابراین:

$$N = \frac{5(5-1)}{2} = 10$$



اکنون ابتدا مراکز آنی دوران واضح را تعیین می‌کنیم.



همان‌گونه که از شکل فوق مشخص است برای دیگر مراکز آنی نمی‌توان اظهارنظری کرد زیرا نمی‌توان هیچ‌کدام از I_{13} و I_{14} و I_{24} و I_{25} و I_{35} را از ترکیب ضلع مشترک دو مثلث و سپس استفاده از قضیه کندی به دست آورد.

۱۳. گزینه ۲ درست است.

برای به دست آوردن مکانیزم مادل سیستم داده شده باید ابتدا از نقطه A لینکی به مرکز انحنا دایره متصل به آن یعنی B ترسیم کرد (باتوجه به این که دو نقطه که با هم در تماس هستند دایره هستند دیگر لازم مرکز انحنا نقطه تماس را به دست آورد چون دایره هستند مرکز انحنا همان مرکز دایره است) سپس از نقطه D به مرکز دایره C باید لینکی رسم کنیم (به همان دلیل بیان شده) و سپس این دو نقطه C و B را با لینکی به یکدیگر متصل نمائیم. ظاهراً هم گزینه ۱ و هم گزینه ۲ می‌توانند جواب باشند ولی توجه نمائید فاصله CB از مجموع شعاع دو دایره تشکیل شده است در حالی که AB تنها شعاع دایره بزرگتر است بنابراین با توجه به این که طول CB از طول AB بلندتر است گزینه ۲ جواب صحیح است.

۱۴. گزینه ۱ درست است.

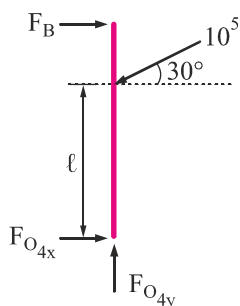
نمودار جسم آزاد لینک O_4B به صورت زیر است:

باتوجه به این که لینک AB عضو دو نیرویی است F_B باید در

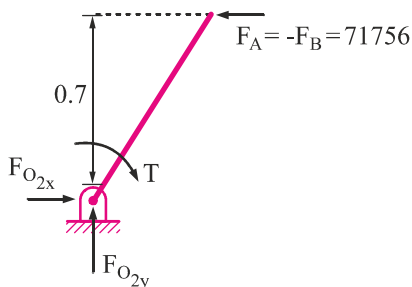
راستای AB باشد تا ممانی حول A ایجاد نکند بنابراین F_B

افقی است و هیچ مؤلفه عمودی ندارد.

با توجه به این که سیستم ثابت است خواهیم داشت:



$$\sum M_{O_4} = 0 \Rightarrow F_B (0.7) = 10^5 \cos 30 \frac{(\ell)}{100} \Rightarrow F_B \approx 71756 \text{ N}, \quad \ell = 100 \tan 30 \approx 58$$



برای لینک AB داریم $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ و بنابراین نمودار جسم آزاد لینک O_2A به صورت مقابل است

$$F_A = -F_B = 71756$$

که داریم:

$$\begin{aligned} \sum M_{O_2} = 0 &\Rightarrow F_A(0.7) = T \\ \Rightarrow 71756(0.7) = T &\Rightarrow T = 50229 \text{ N.m} \end{aligned}$$

که T گشتاور موتور است (در ضمن F_{O_2y} برابر صفر است چرا؟!)

توان موتور توسط رابطه $P = T\omega$ محاسبه می گردد بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} P &= T \omega \\ \omega &= 100 \text{ rpm} = 100 \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = 50229 \left(100 \frac{2\pi}{60} \right) = 526 \text{ kW} \quad , \quad 526 \text{ kW} \approx 500 \text{ kW}$$

۱۵. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{\omega_3 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = \frac{-\left(\frac{N_2}{N_3}\right)}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} = -\frac{N_1}{N_3}$$

علامت منفی در سمت راست مادل به این دلیل است که چرخ دنده های ۱ و ۲ هم جهت و چرخ دنده های ۲ و ۳ در خلاف جهت یکدیگر می چرخند.

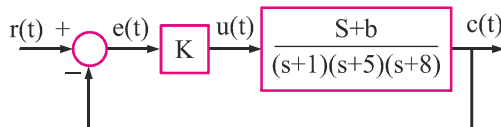
$$\omega_1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega_3 - \omega_4}{-\omega_4} = \frac{-N_1}{N_3}$$

با توجه به شکل داریم $N_1 = N_3 + 2N_2$ بنابراین:

$$\frac{\omega_3 - \omega_4}{-\omega_4} = -\frac{N_3 + 2N_2}{N_3} \Rightarrow \frac{-\omega_3}{\omega_4} + 1 = -1 - 2\frac{N_2}{N_3}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_3}{\omega_4} = 2 + 2\frac{N_2}{N_3} = 2\left(1 + \frac{N_2}{N_3}\right) \rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۱۶. گزینه ۲ درست است.



$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{SR(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s}}{1 + \frac{s+b}{(s+1)(s+5)(s+8)}} = \frac{1}{1 + \frac{b}{40}}$$

برای صفر شدن خطای حالت ماندگار باید $b \rightarrow \infty$ میل کند که امکان پذیر نیست. بنابراین گزینه ۱ غلط است.

$$(s+1)(s+5)(s+8) + k(s+b) = 0 \Rightarrow s^3 + 14s^2 + (53+k)s + 40+kb = 0$$

s^3	1	53+k
s^2	14	40+kb
s^1	$\frac{14(53+k) - (40+kb)}{14}$	
s^0	40+kb	

شرایط پایداری:

$$\begin{cases} 53+k - \frac{40+kb}{14} > 0 \Rightarrow 53+k - 2.86 - \frac{kb}{14} > 0 \Rightarrow k \left(1 - \frac{b}{14}\right) > -50.14 \Rightarrow b < 14 \left(1 + \frac{50.14}{k}\right) \\ 40+kb > 0 \rightarrow \end{cases}$$

همواره برقرار است

چون $b > 0$, $k > 0$ است.

کافی است $b < 14$ انتخاب شود تا این شرط برآورده شود.

برای پایداری کافی است $0 < b < 14$ انتخاب شود. در این شرایط به ازای تمامی مقادیر k سیستم پایدار است. یعنی گزینه ۲ صحیح است.

از آنجا که سیستم مرتبه سوم است به ازای مقادیر مختلف k و b قطب‌های مسلط سیستم می‌تواند مزدوج مختلط و یا حقیقی باشد. بنابراین گزینه ۳ غلط است.

$$C(s) = U(s) \cdot \frac{s+b}{(s+1)(s+5)(s+8)} \Rightarrow C_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s C(s)$$

$$C_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{s+b}{(s+1)(s+5)(s+8)} = \frac{b}{40} \Rightarrow$$

افزایش b ، $C_{ss}(t)$ به عدد بزرگ‌تری میل می‌کند. بنابراین گزینه ۴ غلط است.

۱۷. گزینه ۳ درست است.

$$TF = C(SI - A)^{-1} B + D$$

$$TF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ 3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -3 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \begin{bmatrix} 1 \\ s+5 \end{bmatrix}$$

$$y(s) = TF \cdot U(s)$$

$$y_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \begin{bmatrix} 1 \\ s+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

۱۸. گزینه ۲ درست است.

از آنجا که سیستم دارای یک صفر در ناحیه راست و دو قطب مزدوج مختلط و یک قطب ساده در ناحیه چپ محور موهومی است و سیستم غیرمینیمم فاز بوده و تابع تبدیل آن می‌تواند گزینه ۱ یا ۲ باشد از آنجا که مکان هندسی روی محور حقیقی از $+\infty$ شروع می‌شود سیستم دارای فیدبک مثبت است. یعنی گزینه ۲ صحیح است.

۱۹. گزینه ۲ درست است.

از آنجا که به دنبال یافتن تابع تبدیل از ورودی U خروجی Q_s هستیم می‌توان ظرف ۱ را حذف و Q_1 را ورودی به سیستم در نظر گرفته و همچنین ظرف ۴ را حذف و Q_3 را خروجی از سیستم در نظر بگیریم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} U - Q_2 - Q^* = \dot{x}_2 \\ Q^* + Q_1 - Q_3 = \dot{x}_3 \\ Q_2 - Q_5 = \dot{x}_5 \\ x_2 = Q_2 \\ x_2 - x_3 = Q^* \\ x_3 = Q_3 \\ x_5 = Q_5 \end{cases}$$

مادلات 4 تا 7 را در مادلات 1 تا 3 جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} U - X_2 - (X_2 - X_3) = SX_2 & (1) \\ X_2 - X_3 + Q_1 - X_3 = SX_3 & (2) \\ X_2 - X_5 = SX_5 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow X_2 = (S+1)X_5$$

$$(2) \rightarrow X_2 + Q_1 = (S+2)X_3 \Rightarrow X_3 = \frac{1}{S+2}X_2 + \frac{1}{S+2}Q_1 \Rightarrow X_3 = \frac{S+1}{S+2}X_5 + \frac{1}{S+2}Q_1$$

$$(1) \rightarrow U + X_3 = (S+2)X_2 \Rightarrow U + \frac{S+1}{S+2}X_5 + \frac{1}{S+2}Q_1 = (S+2)X_2$$

$$U + \frac{1}{S+2}Q_1 = (S+2)(S+1)X_5 - \frac{S+1}{S+2}X_5 \Rightarrow U + \frac{1}{S+2}Q_1 = \frac{(S+1)((S+2)^2 - 1)}{S+2}X_5$$

$$U + \frac{1}{S+2}Q_1 = \frac{(S+1)(S^2 + 4S + 3)}{S+2}X_5 = \frac{(S+1)^2(S+3)}{S+2}X_5 \Rightarrow \boxed{\frac{X_5}{U} = \frac{S+2}{(S+1)^2(S+3)}}$$

۲۰. گزینه ۱ درست است.

$$\text{مادله مشخصه: } (s-a)(s+b) + k(s+c) = 0$$

$$s^2 + (b-a+k)s + kc - ab = 0$$

شرایط پایداری:

$$\begin{cases} b-a+k > 0 \Rightarrow k > a-b & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} kc-ab > 0 \Rightarrow k > \frac{ab}{c} & (II) \end{cases}$$

$$(I) \cap (II) = k > \max \left\{ a-b, \frac{ab}{c} \right\}$$

دینامیک و ارتعاشات

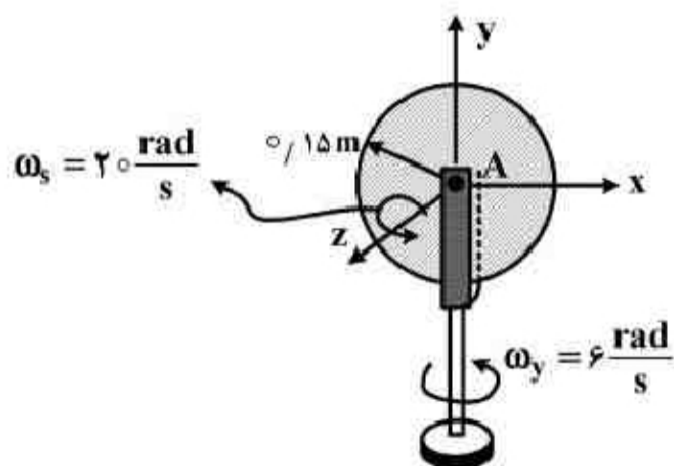
- ۱- دیسک ۲۰ کیلوگرمی شکل زیر با سرعت $\omega_s = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ حول محور مرکزی z خود می‌چرخد در حالی که محور پشتیبان آن با سرعت $\omega_y = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ دوران می‌کند. گشتاور زیروسکوپی حاصل از نیروهای عکس‌العملی که از سوی پین A به دلیل این حرکت به دیسک وارد می‌شود، چند N.m می‌باشد؟

(۱) ۱۳/۵

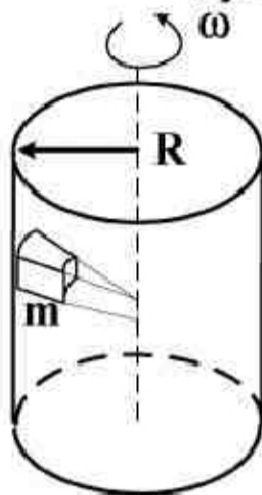
(۲) ۲۷

(۳) ۵۴/۵

(۴) ۶۰



- ۲- حداقل سرعت زاویه‌ای یک استوانه به شعاع R چقدر باشد تا بلوک نشان داده شده داخل آن که جرم m دارد به سمت پایین نلغزد؟ ضریب اصطکاک بین بلوک و سطح داخلی استوانه μ فرض شود.



$$\sqrt{\frac{g}{2\mu R}} \quad (1)$$

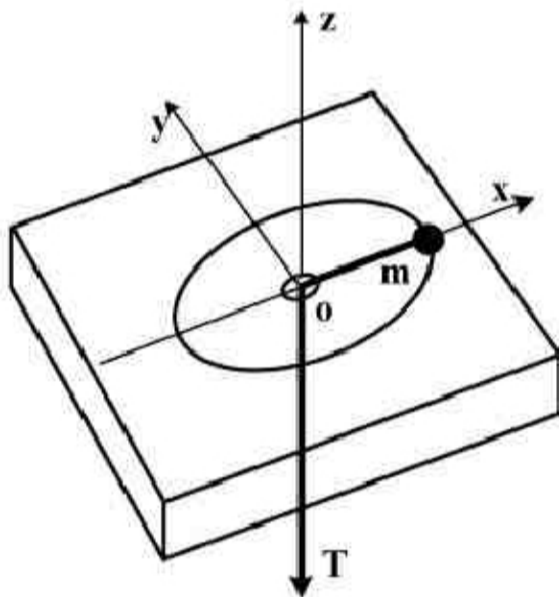
$$\sqrt{\frac{mR}{\mu}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{g}{\mu R}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{2g}{\mu R}} \quad (4)$$

- ۳- ذره‌ای به جرم m در حالی که توسط طناب بدون جرمی مهار شده است، در صفحه افقی حرکت می‌کند. اگر از اصطکاک چشم‌پوشی شود، مقدار $\frac{d\omega}{dr}$ چقدر است؟ (ω سرعت دوران ذره حول محور z و r فاصله آن تا

سوراخ می‌باشد.)



$$\frac{-2\omega}{r} \quad (1)$$

$$\frac{-\omega}{r} \quad (2)$$

$$\frac{\omega}{r} \quad (3)$$

$$\frac{\Delta\omega}{r} \quad (4)$$

- ۴- نقطه‌ای مادی با سرعت ثابت v در امتداد منحنی فضایی $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $z = \theta$ حرکت می‌کند. مقدار شتاب نقطه مادی چقدر است؟

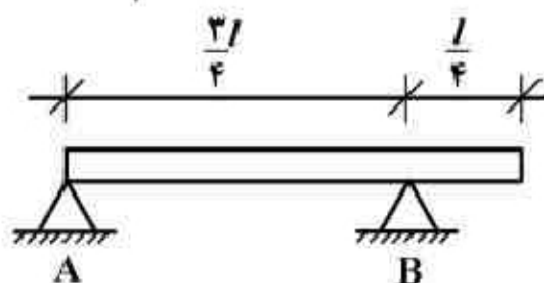
$$\frac{v^2}{2} \quad (2)$$

$$v^2 \quad (4)$$

(1) صفر

$$v^2 \cos \theta \quad (3)$$

- ۵- میله یکنواخت زیر با وزن W در A لولا و در B روی تکیه‌گاه غلتکی قرار دارد. اگر ناگهان تکیه‌گاه B برداشته شود، نیروی لحظه‌ای وارد بر تکیه‌گاه A در راستای قائم چند برابر W خواهد بود؟ ($I_A = \frac{1}{3} m\ell^2$)



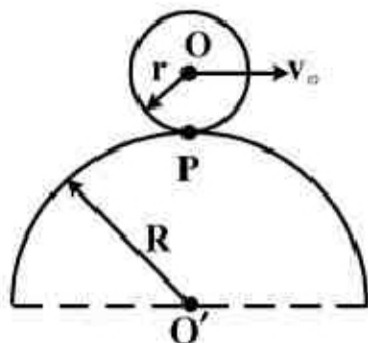
$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

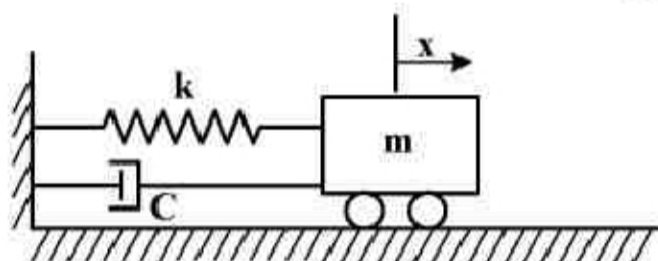
- ۶- استوانه‌ای به شعاع r روی سطح ثابتی به شعاع R غلت بدون لغزش می‌کند. اگر سرعت مرکز استوانه برابر v_o باشد، اندازه شتاب نقطه تماس P کدام است؟



$$\frac{v_o^2}{R+r} + r\dot{\omega} \quad (2) \quad \frac{v_o^2}{r^2} - r\dot{\omega} \quad (1)$$

$$\frac{v_o^2(r+R)}{r(R+r)} \quad (4) \quad \frac{v_o^2 R}{r(R+r)} \quad (3)$$

- ۷- دامنه نوسان در سیستم ارتعاشی زیر با مستهلک‌کننده ویسکوزی در دوره تناوب اول و دوم به ترتیب برابر 2cm و $1/5\text{cm}$ می‌باشد. دامنه نوسان در دوره تناوب سوم چند cm است؟



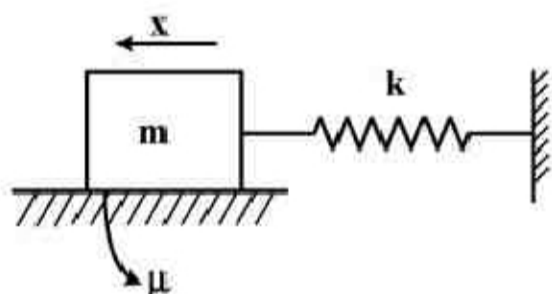
$$0.8 \quad (1)$$

$$1/250 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1/125 \quad (4)$$

- ۸- با وجود اصطکاک خشک، دامنه ارتعاش آزاد سیستم ارتعاشی زیر چگونه تغییر می‌کند؟



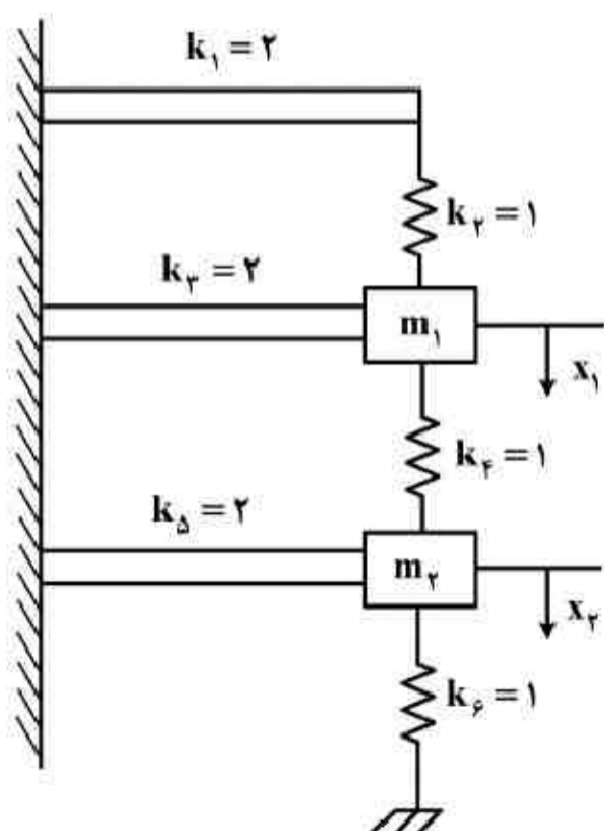
(۱) به صورت خطی کم می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند.

(۲) به صورت نمایی کم می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند.

(۳) به صورت خطی کم می‌شود ولی به سمت صفر میل نمی‌کند.

(۴) به صورت نمایی کم می‌شود ولی به سمت صفر میل نمی‌کند.

- ۹- معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم زیر کدام است؟ ($m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$ و سختی فنرها در شکل



بر حسب $\frac{N}{m}$ داده شده است.)

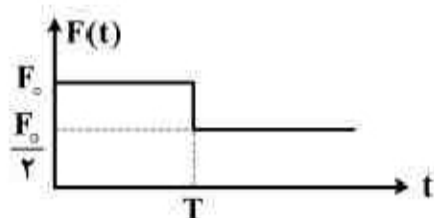
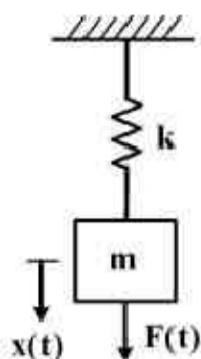
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{5}{3}x_1 + x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \frac{1}{2}x_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{11}{5}x_1 - x_2 = 0 \\ 2\ddot{x}_2 + \frac{5}{3}x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 6x_1 - x_2 = 0 \\ 2\ddot{x}_2 + 4x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{11}{3}x_1 - x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

۱۰- نیرویی مطابق شکل زیر به یک سیستم جرم - فنر وارد می‌شود. پاسخ سیستم، $x(t)$ برای $t > T$ ، کدام است؟



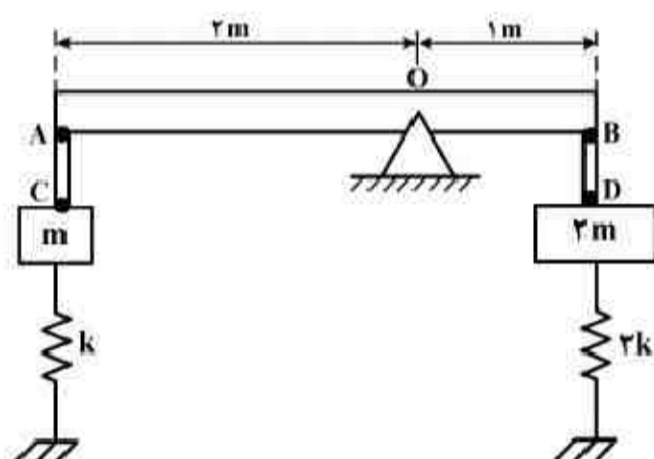
$$(1) \quad \frac{F_0}{2k} [1 + \cos \omega_n (t - T)]$$

$$(2) \quad \frac{F_0}{k} + \frac{F_0}{2k} \cos \omega_n (t - T)$$

$$(3) \quad \frac{F_0}{k} + \frac{F_0}{2k} [1 + \cos \omega_n (t - T)]$$

$$(4) \quad \frac{F_0}{2k} - \frac{F_0}{k} \cos \omega_n t + \frac{F_0}{2k} \cos \omega_n (t - T)$$

۱۱- میله صلب، یکنواخت و بسیار باریک AB با جرم m در نقطه O در شکل زیر مفصل شده است. با صرف نظر از جرم میله‌های صلب AC و BD، فرکانس طبیعی این سیستم برابر با کدام است؟



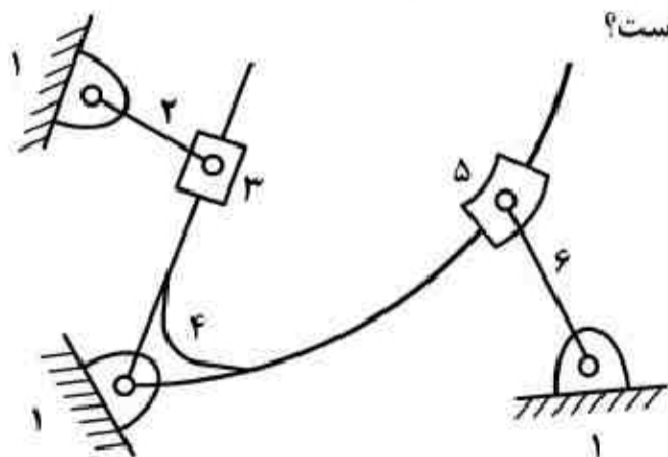
$$(1) \quad \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{6k}{7m}}$$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{8k}{9m}}$$

$$(4) \quad 3 \sqrt{\frac{k}{7m}}$$

۱۲- در اهرم‌بندی شش میله‌ای شکل زیر جسم ۴ دارای سرعت زاویه‌ای ثابت ω_4 می‌باشد. درباره شتاب لغزنده‌های ۳ و ۵ نسبت به جسم ۴ گزینه صحیح کدام است؟



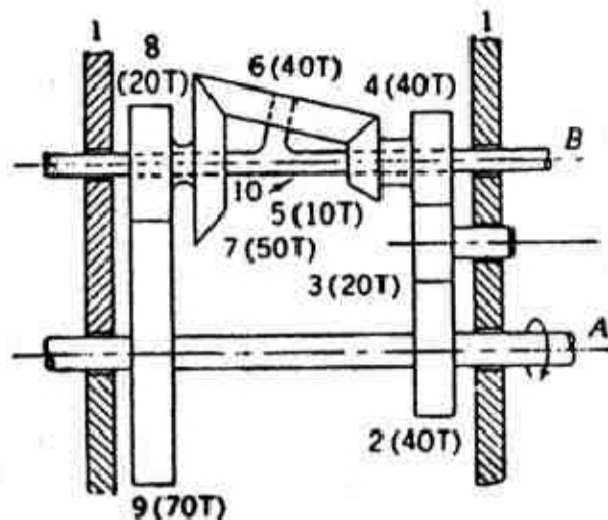
(۱) شتاب گریولیس هر دو غیر صفر می‌باشند.

(۲) همواره شتاب نرمال هر دو غیر صفر می‌باشند.

(۳) همواره تمامی مؤلفه‌های شتاب (مماسی، نرمال و گریولیس) هر دو غیر صفر می‌باشند.

(۴) تمامی مؤلفه‌های شتاب (مماسی، نرمال و گریولیس) هر دو مستقل از ω_4 می‌باشند.

۱۳- در سیستم زیر محور A با سرعت 1000 rpm در جهت مثبت (جهت نشان داده شده) می چرخد. سرعت دوران محور B چند rpm می باشد؟



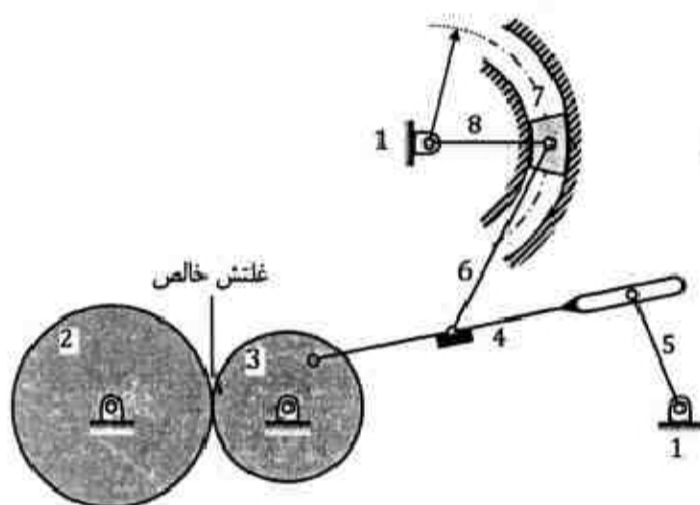
(۱) $-3083/3$

(۲) -2750

(۳) 2750

(۴) $3083/3$

۱۴- درجه آزادی مکانیزم زیر چند است؟ (لولای اتصال عضو ۸ با زمین، مرکز انحنای مسیر لغزنده ی ۷ است.)



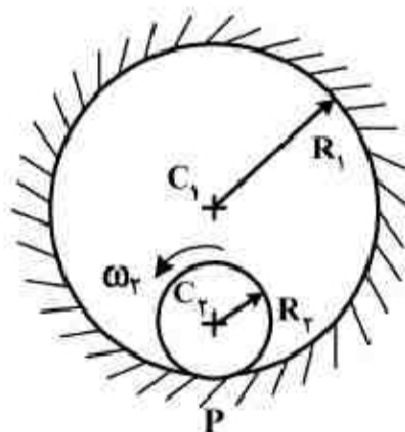
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۵- لینک استوانه ای شکل ۲ در داخل لینک ثابت و استوانه ای شکل ۱ در حال دوران است. اگر در نقطه تماس P غلتش فرض شود کدام گزینه صحیح می باشد؟ (ω_2 ثابت فرض می شود.)



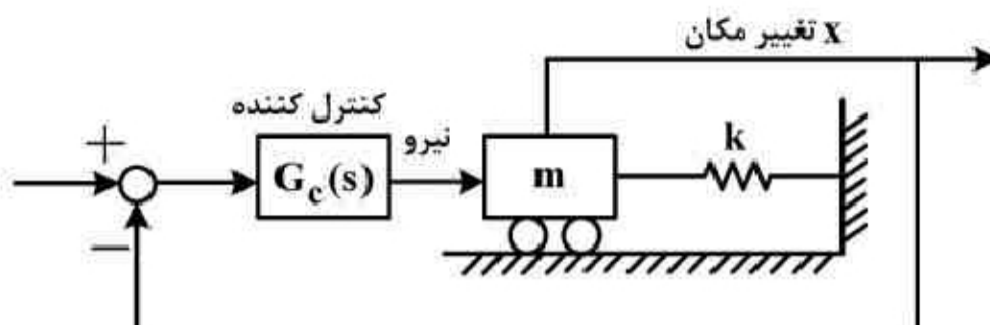
(۱) اگر فقط شعاع R_2 افزایش یابد شتاب نقطه P_2 افزایش می یابد.

(۲) اگر فقط شعاع R_1 افزایش یابد شتاب نقطه P_2 افزایش می یابد.

(۳) اگر فقط شعاع R_2 افزایش یابد شتاب نقطه P_2 کاهش می یابد.

(۴) شتاب نقطه P_2 فقط بستگی به نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ دارد.

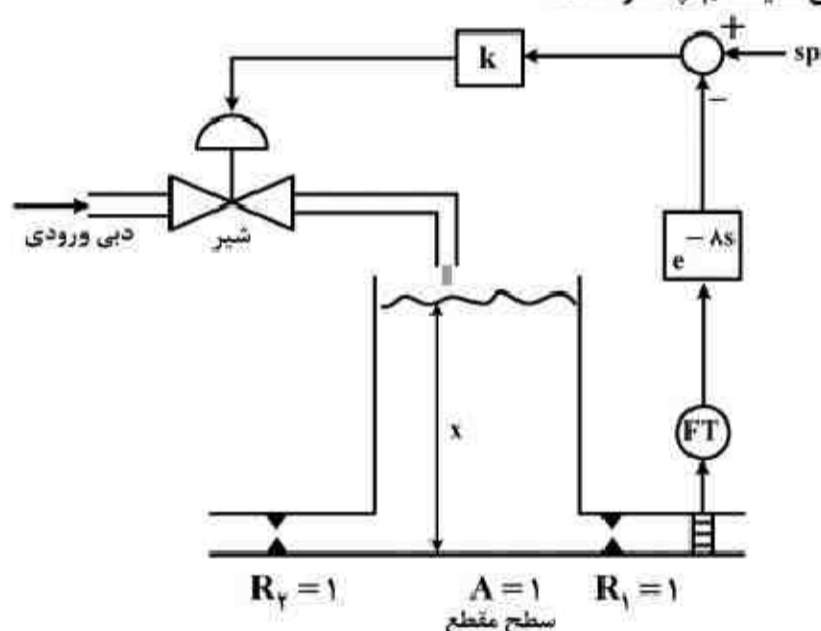
- ۱۶- سیستم اصلی زیر شامل یک فنر و وزنه، ورودی نیروی وارد بر جرم و خروجی تغییر مکان جرم است. یا فرض $m=1$ و $k=1$ نوع و پارامترهای کنترل کننده $G_c(s)$ چه باشند که سیستم مدار بسته دو قطب در ۳- داشته باشد؟



$$G_c(s) = k_p(1 + T_d s), k_p = 1, T_d = \frac{3}{4} \quad (2) \quad G_c(s) = k_p(1 + T_d s), k_p = 4, T_d = 1 \quad (1)$$

$$G_c(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s}), k_p = 1, T_i = \frac{3}{4} \quad (4) \quad G_c(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s}), k_p = 4, T_i = 1 \quad (3)$$

- ۱۷- سیستم زیر دارای تأخیر زمانی ۸ ثانیه‌ای در سیستم اندازه‌گیری می‌باشد. با صرف نظر از دینامیک شیر، حداکثر مقدار مجاز بهره k برای پایدار ماندن سیستم چقدر است؟



$$k > 1/25 \quad (1)$$

$$k > 2 \quad (2)$$

$$k < 2/25 \quad (3)$$

$$k < 3/25 \quad (4)$$

- ۱۸- در معادلات یک سیستم در فضای حالت $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ ، ماتریس‌های A , B , C و D به صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & +2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

- پاسخ سیستم به کدام یک از حالات اولیه زیر، معادل پاسخ سیستم به بردار ورودی ضربه واحد $u_1 = u_2 = \delta(t)$ خواهد بود؟

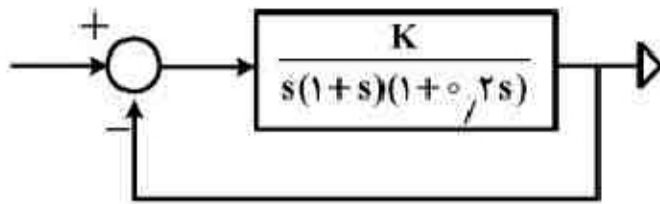
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

۱۹- در سیستم زیر K چقدر باشد، تا حد فاز (Phase margin) مساوی ۳۰° شود؟



(۱) ۱/۶۵

(۲) ۳/۹

(۳) ۶

(۴) ۱۴/۲

۲۰- با توجه به دیاگرام بُد (Bode Diagram) برای سیستم کنترل فیدبک زیر، نوع (type) سیستم کنترل

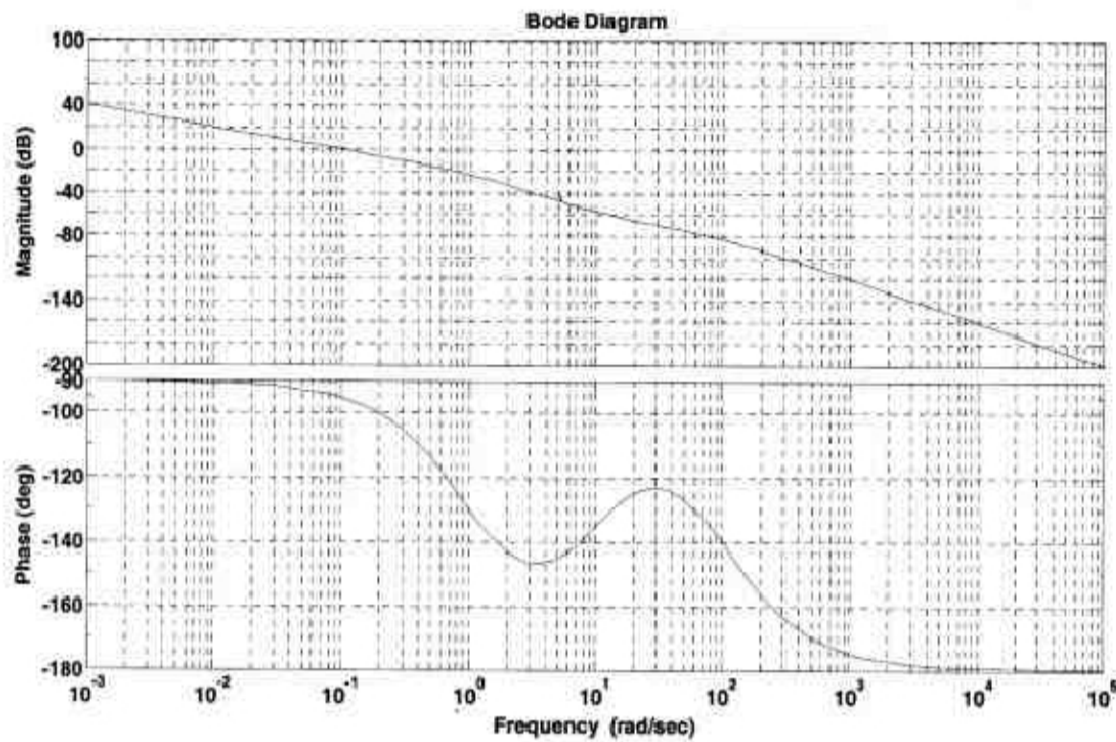
کدام است؟

(۱) دو (N=۲)

(۲) صفر (N=۰)

(۳) سه (N=۳)

(۴) یک (N=۱)



پاسخ تشریحی

۱. گزینه 2 درست است.

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_z = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\vec{\omega} = \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} = 6\hat{j} + 20\hat{k}$$

$$\vec{H}_A = I_{xx}\omega_x \hat{i} + I_{yy}\omega_y \hat{j} + I_{zz}\omega_z \hat{k}, \quad \omega_x = 0 \Rightarrow \vec{H}_A = I_{yy}\omega_y \hat{j} + I_{zz}\omega_z \hat{k}$$

اکنون چنانچه چارچوب Axyz را متصل به A در نظر بگیریم که با سرعت زاویه‌ای $\vec{\Omega} = \omega_y \hat{j}$ در حال دوران است، آهنگ تغییرات مومنتم زاویه‌ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\dot{\vec{H}}_A = \left(\frac{d\vec{H}_A}{dt} \right)_{Axyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_A = I_{yy}\dot{\omega}_y \hat{j} + I_{zz}\dot{\omega}_z \hat{k} + \omega_y \hat{j} \times (I_{yy}\omega_y \hat{i} + I_{zz}\omega_z \hat{k})$$

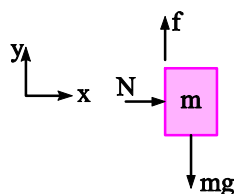
$$= 0 + 0 + 0 + I_{zz}\omega_y\omega_z \hat{i}$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(20)(0.15)^2 = 0.225 \text{ kg.m}^2$$

$$\vec{M} = \dot{\vec{H}}_A \Rightarrow \vec{M} = (0.225)(6)(20) = 27 \text{ N.m}$$

۲. گزینه 3 درست است.

نمودار جسم آزاد جرم m را رسم می‌کنیم:



$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow N = m(R\omega^2) \quad \text{I}$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow f - mg = 0 \quad \text{II}$$

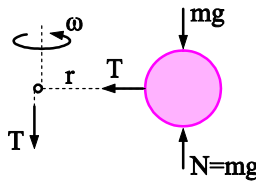
برای آن که حداقل سرعت زاویه‌ای را به دست آوریم جسم را در آستانه لغزش در نظر می‌گیریم بنابراین:

$$f = \mu N$$

حال با جایگذاری $f = \mu N$ در رابطه II و جایگذاری N از رابطه I در آن داریم:

$$\mu(mR\omega^2) - mg = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R\mu}}$$

۳. گزینه ۱ درست است.



با توجه به اینکه نیروهای اعمالی به جسم حول محور دوران (z) هیچ مماسی اعمال نمی‌کنند بنابراین تکانه زاویه‌ای حول محور دوران z ثابت است و در نتیجه نسبت به زمان تغییر نمی‌کند و مشتق آن صفر است.

$$\begin{aligned} H &= mr^2\omega \\ \frac{dH}{dt} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\omega) = 0 = m(2r\omega dr + r^2 d\omega) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d\omega}{dr} &= \frac{-2\omega}{r} \end{aligned}$$

۴. گزینه ۲ درست است.

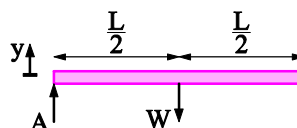
$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = -\dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \ddot{x} = -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ y &= \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{\theta} \cos \theta \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ z &= \theta \Rightarrow \dot{z} = \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(-\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \dot{\theta}^2} \\ &= \sqrt{\dot{\theta}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1)} = \dot{\theta} \sqrt{2} \\ \Rightarrow \dot{\theta} &= \frac{V}{\sqrt{2}}, \quad V = \text{cte} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{\left(-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \right)^2 + \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right)^2 + \ddot{\theta}^2} \\ \Rightarrow a &= \sqrt{\dot{\theta}^4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \dot{\theta}^2 = \left(\frac{V}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{V^2}{2} \end{aligned}$$

۵. گزینه ۱ درست است.

پس از برداشتن تکیه گاه، B نمودار جسم آزاد میله را رسم می‌کنیم.



جسم حول A دوران می‌کند بنابراین:

$$\sum M_A = I_A \alpha \Rightarrow W \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{1}{3} mL^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3W}{2m\ell}$$

شتاب مرکز جرم برابر است با :

$$a_G = \left(\frac{1}{2}\right)\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{3W}{2m\ell}\right) = \frac{3}{4} \frac{W}{m}$$

اکنون در راستای y قانون دوم نیوتن را می‌نویسیم:

$$\sum F_y = ma_g \Rightarrow A - W = m \left(-\frac{3}{4} \frac{W}{m} \right)$$

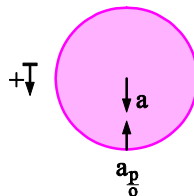
$$\Rightarrow A = W - \frac{3}{4}W = \frac{1}{4}W$$

۶. گزینه 3 درست است.

مرکز استوانه روی دایره‌ای به شعاع $R+r$ در حال دوران است. بنابراین شتاب آن $\frac{V_0^2}{R+r}$ است و جهت آن از O به O' می‌باشد. از طرفی استوانه با سرعت زاویه‌ای $\omega = \frac{V_0}{r}$ نسبت به سطح ثابت با شعاع R در حال دوران است بنابراین $a_P = r\omega^2$ و جهت آن از P به O است و اکنون داریم:

$$a_P = a_O + a_{P/O} \Rightarrow a_P = \frac{V_0^2}{R+r} - r\omega^2$$

$$= \frac{V_0^2}{R+r} - r \left(\frac{V_0}{r} \right)^2 = \frac{V_0^2 R}{r(R+r)}$$



۷. گزینه 4 درست است.

در استهلاک ویسکوز رابطه زیر برقرار است.

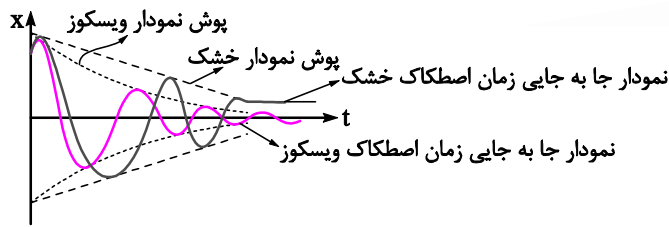
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = K$$

بنابراین:

$$\frac{1.5}{2} = \frac{x_3}{1.5} = 1.125 \text{ cm}$$

۸. گزینه 3 درست است.

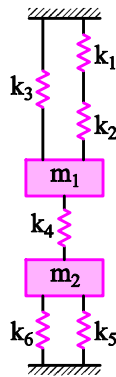
در اصطکاک ویسکوز دامنه به صورت نمایی کم می‌شود و به سمت صفر می‌کند اما در اصطکاک خشک دامنه به صورت خطی کم می‌شود تا جایی که نیروی اصطکاک برابر نیروی فنر گردد که این اتفاق در ماکسیمم دامنه هر سیکل ممکن است رخ دهد بنابراین هیچ گاه دامنه به سمت صفر میل نخواهد کرد.



۹. گزینه 4 درست است.

فترها در شکل رسم شده معادل شکل زیر هستند.

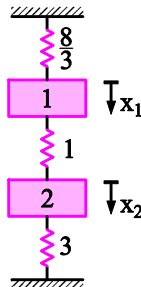
k_1, k_2 سری و فتر معادل آنها با K_3 موازی است، K_5 و K_6 نیز موازی هستند بنابراین داریم:



$$k_{eq_{1,2,3}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3 = \frac{(1)(2)}{1+2} + 2 = \frac{8}{3} \text{ N/m}$$

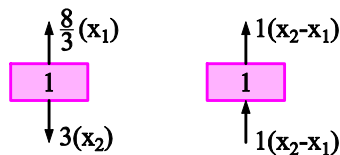
$$k_{eq_{5,6}} = k_5 + k_6 = (1) + (2) = 3 \text{ N/m}$$

بنابراین مجموعه معادل به صورت زیر خواهد بود.



نمودار جسم آزاد جرمهای m_1, m_2 در زیر رسم شده‌اند.

بنابراین معادلات حرکت عبارتند از:



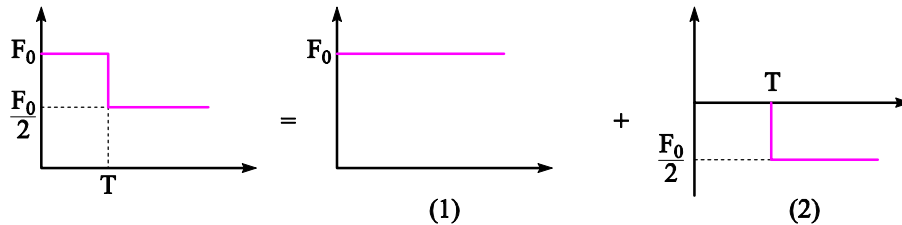
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1) \quad m_1 \ddot{x}_1 = -\frac{8}{3}x_1 + 1(x_2 - x_1) \\ (2) \quad m_2 \ddot{x}_2 = -1(x_2 - x_1) - 3(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \quad \ddot{x}_1 + \frac{11}{3}x_1 - x_2 = 0 \\ (2) \quad \ddot{x}_2 + 4x_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 + \frac{11}{3}x_1 - x_2 = 0 \\ m_2 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_1 = 0 \end{cases}$$

۱۰. گزینه ۴ درست است.

تحریک را می‌توان به شکل زیر تقسیم کرد:



که پاسخ آنها به صورت زیر است:

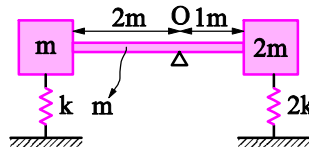
$$(1) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t]$$

$$(2) = -\frac{F_0}{2k} [1 - \cos \omega_n (t - T)]$$

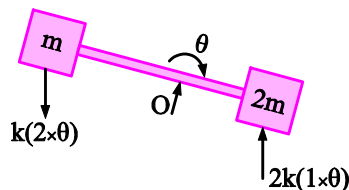
$$(1) + (2) = \frac{F_0}{2k} - \frac{F_0}{k} \cos \omega_n t + \frac{F_0}{2k} \cos \omega_n (t - T)$$

۱۱. گزینه ۲ درست است.

با توجه به اینکه میله‌های AC و BD صلب و بدون جرم هستند سیستم معادل شکل زیر است:



نمودار جسم آزاد سیستم پس از آن که سیستم را به اندازه θ منحرف کردیم به صورت زیر است:



$$\sum M_O = I_O \ddot{\theta}, \quad I_O = \frac{1}{12} m (3^2) + m (0.5)^2 + \frac{1}{12} (2m) (1)^2 + \frac{1}{12} (2m) (2)^2 = 7m$$

ممان اینرسی میله حول O
ممان اینرسی جرم سمت راست حول O
ممان اینرسی جرم سمت چپ حول O

$$-2k\theta(1) - 2k\theta(2) = 7m\ddot{\theta} \Rightarrow 7m\ddot{\theta} + 6k\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{6k}{7m}}$$

ممان ناشی از نیروی فنر سمت راست حول نقطه O
ممان ناشی از نیروی فنر سمت چپ حول نقطه O

۱۲. گزینه ۱ درست است.

شتاب نرمال ۳ نسبت به ۴ و همچنین ۵ نسبت به ۴ صفر است زیرا ۳ و ۵ در راستای عمود بر ۴ نسبت به ۴ حرکت نمی‌کنند.

شتاب مماسی 3 نسبت به 4 و همچنین 5 نسبت به 4 صفر نیست زیرا 3 و 5 در راستای مماس بر 4 نسبت به 4 حرکت می‌کنند.

شتاب کوریولیس 3 و 5 صفر نیست زیرا 4 حرکت دورانی (ω) دارد و 3 و 5 در راستای مماس بر 4 حرکت نسبی (V_{rel}) دارند.

۱۳. گزینه 2 درست است.

محور B بازو است.

$$\omega_2 = \omega_9 = \omega_A = 1000 \text{ rpm}$$

$$\omega_2 (N_2) = -\omega_3 (N_3) \Rightarrow 1000(40) = -\omega_3(20) \Rightarrow \omega_3 = -2000 \text{ rpm}$$

$$\omega_3 (N_3) = -\omega_4 (N_4) \Rightarrow -2000(20) = -\omega_4(40) \Rightarrow \omega_4 = 1000 \text{ rpm}$$

$$\omega_9 (N_9) = -\omega_8 (N_8) \Rightarrow 1000(70) = -\omega_8(20) \Rightarrow \omega_8 = -3500 \text{ rpm}$$

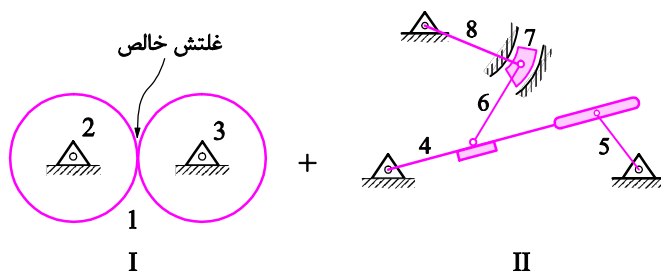
$$\omega_5 = \omega_4, \omega_7 = \omega_8$$

$$\frac{\omega_5 - \omega_B}{\omega_7 - \omega_B} = -\frac{N_6 N_7}{N_5 N_6} \Rightarrow \frac{1000 - \omega_B}{-3500 - \omega_B} = -\frac{(40)(50)}{(10)(40)}$$

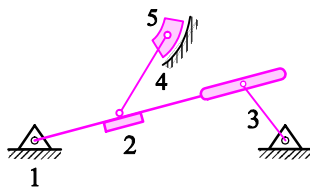
$$\Rightarrow \omega_B = -2750 \text{ rpm}$$

۱۴. گزینه 3 درست است.

مکانیزم نشان داده شده از دو مکانیزم زیر تشکیل شده است.



در مکانیزم II میله 8 قابل حذف شدن است زیرا قیدی به سیستم اعمال نمی‌کند و تنها باعث می‌گردد که محاسبه با روش گروبلر جواب اشتباه دهد با حذف میله 8، مکانیزم II به صورت زیر در خواهد آمد.



و داریم:

$$\text{Dof} = 3(n-1) - 2f_1 - f_2$$

$$n = 5$$

$$f_1 = 5 \rightarrow 1-2, 2-4, 4-5, 1-5, 1-3$$

$$f_2 = 1 \rightarrow 2-3 \Rightarrow \text{Dof} = 3(5-1) - 2(5) - 1 = 1$$

مکانیزم I نیز یک مکانیزم 1 درجه آزادی است (در غلتش خالص یک درجه آزادی و در لغزش دو درجه آزادی داریم) توجه کنید که درجه آزادی مکانیزم I را نباید با معیار گروبلر محاسبه کنیم زیرا به جواب اشتباه $3(3-1) - 2(3) = 0$ می‌رسیم.

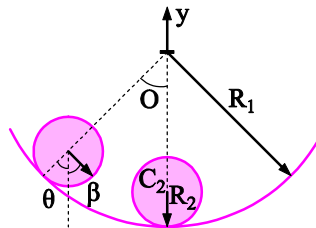
مکانیزم اصلی مجموع مکانیزم I و II است به این صورت که نقطه تماس لینک 4 با زمین در مکانیزم II به لینک 3 در مکانیزم I متصل می‌شود بنابراین درجه آزادی کل برابر با مجموع درجات آزادی I و II است.

$$\text{Dof} = \text{Dof}_I + \text{Dof}_{II} = 1 + 1 = 2$$

۱۵. گزینه ۱ درست است.

$$V_c = R_2 \omega_2 = (R_1 - R_2) \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \left(\frac{R_2}{R_1 - R_2} \right) \omega_2$$



$$a_c = (R_1 - R_2) \ddot{\theta} = (R_1 - R_2) \left[\left(\frac{R_2}{R_1 - R_2} \right) \ddot{\omega}_2 \right] = \frac{R_2^2}{R_1 - R_2} \ddot{\omega}_2 \hat{j}$$

$$a_{p_2} = R_2 \omega_2^2 \hat{j}$$

$$a_{p_2} = a_c + a_{p_2}$$

$$\Rightarrow a_{p_2} = \left(\frac{R_2^2}{R_1 - R_2} \omega_2^2 + R_2 \omega_2^2 \right) \hat{j} = \left(\frac{R_2^2}{R_1 - R_2} + R_2 \right) \omega_2^2 \hat{j}$$

با توجه به عبارت به دست آمده با افزایش R_2 صورت عبارت اول در پرانتز افزایش یافته و مخرج آن نیز کاهش یافته (توجه کنید که R_2 بزرگتر از R_1 نخواهد شد). بنابراین کل عبارت اول داخل پرانتز افزایش می‌یابد عبارت دوم داخل پرانتز نیز که R_2 است. با افزایش R_2 افزایش می‌یابد بنابراین کل پرانتز که برابر با a_{p_2} است با افزایش R_2 خواهد یافت.

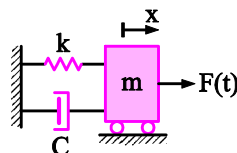
توجه کنید ω_2 سرعت زاویه‌ای مطلق استوانه دوار است که با توجه به شکل برابر $\dot{\theta}$ است (زیرا خط فلش دار R_2 روی استوانه به ازای دوران $\dot{\theta}$ حول مرکز C_1 به اندازه β دوران کرده است).

راه حل تستی: اگر R_1 به سمت بینهایت میل کند مانند این است که استوانه روی سطح افقی دوران می‌کند. که شتاب P_2 برابر با $R_2 \omega_2^2$ خواهد بود اما در صورتی که R_2 به سمت R_1 میل کند به ازای یک سرعت زاویه‌ای اندک ω_2 استوانه به طرز بسیار سریعی داخل لینک استوانه‌ای به شعاع R_1 دوران خواهد کرد و شتاب نقطه تماس P_2 بی‌نهایت خواهد شد.

۱۶. گزینه ۲ درست است.

معادله حرکت حاکم بر ارتعاشات سیستم مقابل به صورت زیر است:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$



با تبدیل لاپلاس گرفتن از رابطه فوق و صفر در نظر گرفتن شرایط اولیه خواهیم داشت:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

در مسأله موردنظر $c = 0$, $k = 1$, $m = 1$ است بنابراین:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

با توجه به اینکه می‌خواهیم دو قطب داشته باشیم باید از کنترلر تناسبی - مشتق گیر (به صورت $k_p(1 + T_d s)$) استفاده کنیم. زیرا اگر از کنترلر انتگرال گیر به صورت $\frac{1}{T_i s}$ یا تناسبی انتگرال گیر به صورت $k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$ استفاده کنیم به جای دو قطب سه قطب خواهیم داشت.

با داشتن کنترلر تناسبی - مشتق گیر تابع تبدیل مدار بسته به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_p(1 + T_d s) \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)}{1 + k_p(1 + T_d s) \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)} = \frac{k_p(1 + T_d s)}{s^2 + 1 + k_p + k_p T_d s}$$

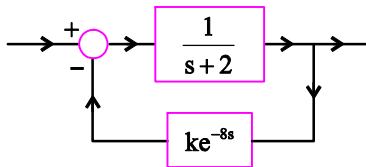
با توجه به اینکه می‌خواهیم دو قطب در -3 داشته باشیم باید مخرج تابع تبدیل به صورت زیر باشد:

$$(s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

با متحد قرار دادن عبارت فوق با مخرج تابع تبدیل داریم:

$$s^2 + 6s + 9 \equiv s^2 + k_p T_d s + 1 + k_p \rightarrow \begin{cases} k_p = 8 \\ T_d = 4 \end{cases}$$

۱۷. گزینه ۳ درست است.



$$G_c = \frac{1}{s+2} \quad \frac{1}{1 + \frac{ke^{-8s}}{s+2}}$$

$$\angle GH = -8\omega - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pi \Rightarrow \omega = -2 \tan 8\omega$$

$$|GH| < 1 \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + 4}} < 1 \Rightarrow k < \sqrt{4 + 4 + g^2} 8\omega \Rightarrow k < 2\sqrt{1 + \tan^2} 8\omega$$

۱۸. گزینه ۴ درست است.

ورودی ضربه تأثیرش در سیستم، معادل سیستمی است که در آن ورودی برابر صفر اما دارای شرایط اولیه معینی است.

$$y(t) = ce^{At}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + du(t)$$

$$y(t) = ce^{At} \underset{0}{x_0} + ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

ورودی ضربه واحد
شرایط اولیه صفر

تبدیل لاپلاس تابع ضربه
واحد برابر 1 است

$$y(t) = ce^{At} I$$

$$y(t) = ce^{At} x_0 + 0 \quad II$$

$$I = II \Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۹. گزینه ۱ درست است.

ابتدا حد فاز را برابر 30° قرار داده و مقدار ω را به دست می آوریم برای این کار فاز را محاسبه می کنیم با 180° جمع کرده و مقدار نهایی را برابر 30° قرار می دهیم. بنابراین:

$$R = -\frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1}\omega - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

$$\pi + R = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi + \left(-\frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1}\omega - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \text{tg}^{-1}\omega + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right) = \frac{\pi}{3}$$

اکنون از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \text{tg}\beta}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\omega + \frac{\omega}{5}}{1 - \frac{\omega^2}{5}} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \omega = 1.096 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

حال حد بهره با فرکانس به دست آمده برابر 1 قرار می دهیم:

$$\Rightarrow \frac{5k}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 25}} = 1, \omega = 1.096 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow k = 1.66$$

۲۰. گزینه ۴ درست است.

با توجه به نمودار، دامنه با شیب $-20 \frac{\text{dB}}{\text{s}}$ شروع به کاهش کرده است. بنابراین سیستم از نوع یک ($N=1$) است.